

Tail Abhängigkeit

Definition 12 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2 . Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ ($\lambda_L > 0$) heißt es, $(X_1, X_2)^T$ hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.

Definition 13 Sei Copula C die Verteilungsfunktion von (U_1, U_2, \dots, U_d) mit $U_i \sim U[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, d$. Die Verteilungsfunktion von $(1 - U_1, 1 - U_2, \dots, 1 - U_d)$ heißt "Survival Copula" von C und wird mit \hat{C} bezeichnet.

Lemma 4 Sei X ein Zufallsvektor mit multivariater Tail-Funktion \bar{F} ($\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \text{Prob}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_d > x_d)$) und Randverteilungsfunktionen F_i , $i = 1, 2, \dots, d$. Sei $\bar{F}_i = 1 - F_i$, $i = 1, 2, \dots, d$. Es gilt

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \dots, \bar{F}_d(x_d))$$

Lemma 5 Für jede Copula C gilt

$$\hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2),$$

wobei \hat{C} die Survival-Copula von C ist.

Theorem 17 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und Copula C . Es gilt

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad \text{und}$$

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

vorausgesetzt die Limes existieren.

Beispiel 13 *Die Gumbel Familie von Copulas:*

$$C_{\theta}^{GU}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right), \theta \geq 1$$

Es gilt $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$, $\lambda_L = 0$.

Beispiel 14 *Die Clayton Familie von Copulas:*

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta}, \theta > 0$$

Es gilt $\lambda_U = 0$, $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$.

Elliptische Copulas

Definition 14 Sei X ein d -dimensionaler Zufallsvektor, seien $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ zwei Konstanten, und sei $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $\phi_{X-\mu} = \psi(t^T \Sigma t)$ gilt, wobei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X - \mu$ ist, dann ist X eine elliptisch verteilter Zufallsvektor mit Parameter $\mu, \Sigma, \psi: X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$.

ψ heißt erzeugende Funktion (oder Generator) von X .

Für $d = 1$ stimmen die elliptischen Verteilungen mit den symmetrischen Verteilungen überein.

Überzeugen Sie sich! Verwenden Sie die stochastische Darstellung einer elliptischen Verteilung.

Theorem 18 (Stochastische Darstellung)

Ein d -dimensionaler Zufallsvektor X ist elliptisch verteilt, $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ und $\text{rang}(\Sigma) = k$, dann und nur dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, $A^T A = \Sigma$, sowie eine nicht negative Zufallsvariable R und einen k -dimensionalen auf der Einheitskugel $S^{k-1} = \{z \in \mathbb{R}^k: z^T z = 1\}$ gleichverteilten Zufallsvektor U gibt, sodass R und U unabhängig sind und $X \stackrel{d}{=} \mu + RAU$.

Anmerkung: Eine elliptische Verteilung X ist radial symmetrisch: $X - \mu \stackrel{d}{=} \mu - X$.

Definition 15 Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d . Dann wird die eindeutige Copula C von F , $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$, elliptische Copula genannt.

Beispiel 15 Gauss'sche Copulas sind elliptische Copulas

Sei C_R^{Ga} die Copula einer d -dimensionalen standard Normalverteilung mit Korrelationsmatrix R :

$$C_R^{Ga}(u) = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)),$$

wobei ϕ_R^d die Gesamtverteilungsfunktion einer d -dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor 0 und Korrelationsmatrix R und ϕ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion einer univariaten standard Normalverteilung ist. Da die Normalverteilung eine elliptische Verteilung ist, ist die Gauss'sche Copula C_R^{Ga} eine elliptische Copula.

Im bivariaten Fall gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} dx_1 dx_2,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$.

t-Copula: ein weiteres Beispiel elliptischer Copulas

Definition 16 Sei $X \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}}AZ \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $S \sim \chi_\alpha^2$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ mit $AA^t = \Sigma$ und $Z \sim N_k(0, I_k)$, und S und Z unabhängig sind. Es heißt, X hat eine d -dimensionale t -Verteilung mit Mittelwert μ (für $\alpha > 1$) und Kovarianzmatrix $\text{Cov}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2}\Sigma$ (für $\alpha > 2$). $\text{Cov}(X)$ existiert nicht für $\alpha \leq 2$.

Definition 17 Die Copula $C_{\alpha,R}^t$ von X heißt t -Copula. Für die t -Copula gilt:

$$C_{\alpha,R}^t(u) = t_{\alpha,R}^d(t_\alpha^{-1}(u_1), \dots, t_\alpha^{-1}(u_d)).$$

$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $i, j = 1, 2, \dots, d$, ist die Korrelationsmatrix von Z ,

$t_{\alpha,R}^d$ ist die Verteilungsfunktion von $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}}Z$, wobei $S \sim \chi_\alpha^2$ und $Z \sim N_k(0, I_k)$ unabhängig sind, und t_α sind die Randverteilungen von $t_{\alpha,R}^d$.

Bivariater Fall ($d = 2$):

$$C_{\alpha,R}^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\alpha(1-\rho^2)} \right\}^{-(\alpha+2)/2} dx_1 dx_2,$$

für $\rho \in (-1, 1)$. R_{12} ist der lineare Korrelationskoeffizient der dazugehörigen bivariaten t_α -Verteilung für $\alpha > 2$.

Copulas: Weitere Eigenschaften

Definition 18 (Radiale Symmetrie oder Kugel-Symmetrie)

Ein Zufallsvektor X (oder eine Verteilungsfunktion) heißt radial symmetrisch (oder kugel-symmetrisch) um den Punkt a wenn $X - a \stackrel{d}{=} a - X$.

Beispiel: Ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \in \mathbb{R}^d$ ist radial-symmetrisch um μ .

Definition 19 (Radiale Symmetrie von Copulas)

Eine Copula C heißt radial-symmetrisch wenn

$$(U_1 - 0.5, \dots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \dots, 0.5 - U_d) \iff U \stackrel{d}{=} \mathbf{1} - U,$$

wobei (U_1, U_2, \dots, U_d) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C ist.

Für eine radial symmetrische Copula gilt $C = \hat{C}$.

Beispiel: Elliptische Copulas sind radial symmetrisch.

Die Gumbel und Clayton Copulas sind es nicht. Überzeugen Sie sich!

Die Dichtefunktion einer Copula

Copulas haben nicht immer eine Dichtefunktion. Z.B. die Co-Monotonie Copula M bzw. die Anti-Monotonie Copula W haben keine Dichtefunktion.

Wenn die Dichtefunktion c einer Copula C existiert dann gilt

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d}$$

Sei C die Copula einer Gesamtverteilung F mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Dann kann die Gleichung

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$$

differenziert werden um die Dichte c von C zu erhalten:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

f ist die Gesamtdichtefunktion, f_i sind die Dichtefunktionen der Randverteilungen, $1 \leq i \leq d$, und F_i^{-1} ist die inverse Funktion von F_i .

Definition 20 Ein Zufallsvektor X heißt vertauschbar (“exchangeable”) wenn $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)})$ für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(d))$ von $(1, 2, \dots, d)$.

Definition 21 Eine Copula C heißt vertauschbar wenn sie die Gesamtverteilung eines vertauschbaren Zufallsvektors (mit Gleichverteilungen als Randverteilungen) ist.

Für eine solche Copula gilt:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) \stackrel{d}{=} C(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \dots, u_{\pi(d)})$$

für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(d))$ von $(1, 2, \dots, d)$.

Beispiele von vertauschbaren Copulas: Gumbel, Clayton, Gauss’sche Copula C_P^{Ga} , t -Copula $C_{\nu, P}^t$ für den Fall, dass P eine Equikorrelationsmatrix ist: $R = \rho J_d + (1 - \rho)I_d$. $J_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist eine Matrix bestehend aus lauter Einsen, und $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist die d -dimensionale Einheitsmatrix.

Für bivariate vertauschbare Copulas gilt:

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2).$$

Theorem 19 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Korollar 2 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula C_ρ^{Ga} , wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Theorem 20 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein t -verteilter Zufallsvektor mit ν Freiheitsgraden, Mittelwert 0 und linearer Korrelationsmatrix R : $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. Für $R_{12} > -1$ gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 19. Hinweis:

$$X_2|X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.