Theorem 12 *(Fréchet Schranken)*
Für jede Copula gilt

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} u_k - d + 1, 0\right\} \leq C(u_1, u_2, \ldots, u_d) \leq \min\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}.$$

Notation: Untere Schranke =: W_d und obere Schranke =: M_d, für $d \geq 2$. Für $d = 2$ setzen wir $M := M_2$, $W := W_2$.

Anmerkung: Ein analoges Ergebnis wie im Satz 12 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen F mit Randverteilungen F_i, $1 \leq i \leq d$:

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} F_k(x_k) - d + 1, 0\right\} \leq F(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)\}.$$

Beispiel 10 *Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke W_d für $d \geq 3$ keine Copula ist.*

Hinweis: Verwenden Sie die Mengenfunktion Q

$$Q([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_d, b_d]) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} \ldots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \ldots, u_{dk_d})$$

wobei $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_k \leq b_k$ und $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Theorem 13 *(Ohne Beweis)*
Für jedes $d \geq 3$ und jedes $u \in [0,1]^d$, es existiert eine Copula $C_{d,u}$, sodass $C_{d,u}(u) = W_d(u)$.

Anmerkung 1: Für jedes $d \geq 2$ ist die Fréchet obere Schranke M_d eine Copula.

Überprüfung der 3 Copula-Axiome ist einfach.

Anmerkung 2: Weiters sind M und W Copulas.

Hinweis: Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Seien $Y = T(X)$ und $Z = S(X)$ zwei Zufallsvariablen, wobei T und S zwei streng monotone Funktionen, T steigend und S fallend, sind. Nun ist M die Copula von $(X, T(X))^T$ und W die Copula von $(X, S(X))^T$.

Co-Monotonie und Anti-Monotonie

Definition 9 *X_1 und X_2 heißen co-monoton wenn M eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist. X_1 und X_2 heißen anti-monoton wenn W eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist.*

Theorem 14 *Angenommen eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist W oder M. Es existieren dann zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z, sodass*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z))\,.$$

Falls M die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann sind α und β monoton steigend, falls W die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann ist α monoton steigend und β monoton fallend.

Wenn die Randverteilungen F_1 und F_2 von $(X_1, X_2)^T$ stetig sind, dann gilt:

$C = W \Longleftrightarrow X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$ *monoton fallend*

$C = M \Longleftrightarrow X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$ *monoton steigend*

Beweis: In McNeil et al., 2005.

Theorem 15 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen F_1, F_2 und einer nicht spezifizierten Abhängigkeitsstruktur. Sei $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$. Dann gilt:*

1. *Die Menge der möglichen linearen Korrelationen von X_1 und X_2 ist ein abgeschlossenes Intervall $[\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$ mit* $0 \in [\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$.

2. *Die minimale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn X_1 und X_2 anti-monoton sind. Die maximale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn X_1 und X_2 co-monoton sind.*

Im Beweis wird die Höffding'sche Gleichung verwendet:

Lemma 3 *(Die Höffding'sche Gleichung)*

Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Gesamtverteilung F und Randverteilungen F_1, F_2. Wenn $cov(X_1, X_2) < \infty$ dann gilt:

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1 dx_2.$$

Beweis in McNeil et al.,2005.

Beispiel 11 *Sei* $X_1 \sim Lognormal(0,1)$ *und* $X_2 \sim Lognormal(0,\sigma^2)$, $\sigma > 0$. *Bestimmen Sie* $\rho_{L,min}(X_1,X_2)$ *und* $\rho_{L,max}(X_1,X_2)$.

Beispiel 12 *Betrachten Sie zwei ZV* Z_1 *und* Z_2*, die die Verluste zweier Portfolii darstellen. Sei* $Z_1 \sim N(0,1)$, $Z_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(Z_1,Z_2) = 0$.

Geben Sie zwei Zufallsvektoren $(X_1,X_2)^T$ *und* $(Y_1,Y_2)^T$ *mit unterschiedlichen Gesamtverteilungsfunktionen an, für die* $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha) \neq F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$ *gilt und die obigen Annahmen erfüllt sind, d.h.* $X_1,X_2,Y_1,Y_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(X_1,X_2) = 0$, $\rho_L(Y_1,Y_2) = 0$,.

Fazit: Aus den Verlustverteilungen der zwei Teilen eines Portfolios und aus der Korrelation der jeweiligen Verluste lassen sich keine Schlüsse über die Verlustverteilung des Gesamtportfolios ziehen.

Kendall's Tau und Spearman's Rho

Seien $(x,y)^T$ und $(\tilde{x},\tilde{y})^T$ zwei Beobachtungen von einem Zufallsvektor $(X,Y)^T$. $(x,y)^T$ und $(\tilde{x},\tilde{y})^T$ heißen *übereinstimmend* falls $(x-\tilde{x})(y-\tilde{y}) > 0$ und *nicht übereinstimmend* falls $(x-\tilde{x})(y-\tilde{y}) < 0$.

Definition 10 *Sei $(X_1,X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen. Der Kendall's Tau ist für $(X_1,X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_\tau(X_1,X_2) = P((X_1-X_1')(X_2-X_2') > 0) - P((X_1-X_1')(X_2-X_2') < 0),$$

wobei $(X_1',X_2')^T$ is eine unabhängige Kopie von $(X_1,X_2)^T$.

Äquivalent: $\rho_\tau(X_1,X_2) = E(sign[(X_1-X_1')(X_2-X_2')])$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$: $\rho_\tau(X) = cov(sign(X-X'))$, wobei $X' \in \mathbb{R}^D$ eine unabhängige Kopie von $X \in \mathbb{R}^d$ ist.

Der Kendall's Tau der Stichprobe:

Sei $\{(x_1,y_1)^T,(x_2,y_2)^T,\ldots,(x_n,y_n)^T\}$ eine Stichprobe von n Beobachtungen des Zufallsvektors $(X,Y)^T$ dessen Randverteilungen stetig sind. Sei c die Anzahl der übereinstimmenden Paare und d die Anzahl der nicht übereinstimmenden Paare aus der Stichprobe.

$$\tilde{\rho}_\tau(X,Y) = \frac{c-d}{c+d} \overset{a.s.}{=} \frac{c-d}{n(n-1)/2}$$

Definition 11 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen. Der Spearman's Rho ist für $(X_1, X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3(P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') > 0) - P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') < 0)),$$

wobei $(X_1', X_2')^T$, $(X_1'', X_2'')^T$ unabhängige Kopien von $(X_1, X_2)^T$ sind.

Äquivalente Definition (ohne Beweis):
Seien F_1 und F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$. Es gilt $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_L(F_1(X_1), F_2(X_2))$, d.h. der Spearman's Rho ist die lineare Korrelation der eindeutigen Copula von $(X_1, X_2)^T$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$:
$\rho_S(X) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2), \ldots, F_d(X_d))$ ist die Korrelationsmatrix der eindeutigen Copula von X, wobei F_1,F_2,...,F_d die stetigen Randverteilungen von X sind.

Theorem 16 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und eindeutiger Copula C. Für die Rankkorrelationen $\rho_\tau(X_1, X_2)$ und $\rho_S(X_1, X_2)$ gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3$$

Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S.

- ρ_τ und ρ_S sind symmetrische Abhängigkeitsmaße mit Wertebereich $[-1, 1]$.

- Falls X_1, X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- X_1, X_2 co-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1$. X_1, X_2 anti-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = -1$.

- Seien F_1, F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$ und T_1, T_2 zwei streng monotone Funktionen in $[-\infty, \infty]$. Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_\tau(T_1(X_1), T_2(X_2))$ und $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_S(T_1(X_1), T_2(X_2))$.

(Siehe Embrechts et al., 2002).