

## Multivariate elliptische Verteilungen

### a) Die multivariate Normalverteilung

**Definition 2** Der Zufallsvektor  $(X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  hat eine multivariate Normalverteilung (oder eine multivariate Gauss'sche Verteilung)

wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$ , wobei  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T$  ein Vektor von i.i.d. normalverteilten ZV ( $Z_i \sim N(0, 1)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ ),  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix und  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor.

Für so einen Zufallsvektor  $X$  gilt:  $E(X) = \mu$ ,  $cov(X) = \Sigma = AA^T$  ( $\Sigma$  positiv semidefinit). Notation:  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ .

**Theorem 1** (Multivariate Normalverteilung: äquiv. Definitionen)

1.  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  für einen Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^d$  und eine positiv semidefinite Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , dann und nur dann wenn  $\forall a \in \mathbb{R}^d$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T$ , die Zufallsvariable  $a^T X$  normal verteilt ist.
2. Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  ist multivariat normal verteilt dann und nur dann wenn seine charakteristische Funktion folgendermaßen gegeben ist:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = \exp\{it^T \mu - \frac{1}{2}t^T \Sigma t\}$$

für einen Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^d$  und eine positiv semidefinite Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

3. Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  mit  $E(X) = \mu$  und  $\text{cov}(X) = \Sigma$ , wobei die Determinante von  $\Sigma$  positiv ist ( $\det(\Sigma) := |\Sigma| > 0$ ), ist normal verteilt, d.h.  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ , dann und nur dann wenn seine Dichtefunktion folgendermaßen gegeben ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}{2} \right\}.$$

Beweis: (siehe zB. Gut 1995)

**Theorem 2** (*Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung*)

Für  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  gilt:

*Lineare Kombinationen:*

Für  $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$  und  $b \in \mathbb{R}^k$ . Es gilt dann  $BX + b \in N_k(B\mu + b, B\Sigma B^T)$ .

*Randverteilungen:*

Setze  $X^T = (X^{(1)T}, X^{(2)T})$  für  $X^{(1)T} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$  und  $X^{(2)T} = (X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_d)^T$  und analog

$$\mu^T = (\mu^{(1)T}, \mu^{(2)T}) \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann  $X^{(1)} \sim N_k(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)})$  und  $X^{(2)} \sim N_{d-k}(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)})$ .

Bedingte Verteilungen:

Wenn  $\Sigma$  regulär, dann ist auch der bedingte Z.Vektor  $X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)}$  multivariat normal verteilt

$$X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{d-k}\left(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}\right) \text{ wobei}$$

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\left(x^{(1)} - \mu^{(1)}\right) \text{ und}$$

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Quadratische Formen:

Wenn  $\Sigma$  regulär, dann gilt  $D^2 = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi_d^2$ .  
Die Zufallsvariable  $D$  heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  und  $Y \sim N_d(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$  zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann  $X + Y \sim N_d(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$ .

## b) Varianz-gemischte Normalverteilungen

**Definition 3** Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine multivariate Varianz-gemischte Normalverteilung wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + WAZ$  wobei:  $Z \sim N_k(0, I)$ ,  $W \geq 0$  ist eine von  $Z$  unabhängige positive Zufallsvariable,  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor,  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix, und  $I$  ist die Einheitsmatrix.

Unter der Bedingung  $W = w$  ist  $X$  normalverteilt:  $X \sim N_d(\mu, w^2 \Sigma)$ , wobei  $\Sigma = AA^T$ .

$E(X) = \mu$  und  $cov(X) = E(W^2 AZZ^T A^T) = E(W^2) \Sigma$  falls  $E(W^2) < \infty$

### Beispiel 4 Die multivariate $t_\alpha$ -Verteilung

Sei  $Y \sim IG(\alpha, \beta)$  (Inverse Gamma-Verteilung) mit Dichtefunktion:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Dann gilt:

$$E(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1, \quad \text{var}(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad \text{für } \alpha > 2$$

Sei  $W^2 \sim IG(\alpha/2, \alpha/2)$ . Dann ist die Verteilung von  $X = \mu + WAZ$  eine multivariate  $t_\alpha$  Verteilung mit  $\alpha$  Freiheitsgraden:  $X \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$ .

$$cov(X) = E(W^2) \Sigma = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Sigma$$

### c) Sphärische Verteilungen

**Definition 4** Ein Zufallsvektor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  hat eine sphärische Verteilung wenn für jede orthogonale Matrix  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$  die Gleichung  $UX \stackrel{d}{=} X$  gilt.

**Theorem 3** Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. Der Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine sphärische Verteilung.
2. Es existiert eine Funktion  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass die charakteristische Funktion von  $X$  folgendermaßen gegeben wird:

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_d^2)$$

3. Für jeden Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$  gilt  $a^T X \stackrel{d}{=} \|a\| X_1$  wobei  $\|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2$ .
4.  $X$  lässt sich als  $X \stackrel{d}{=} RS$  repräsentieren, wobei der Zufallsvektor  $S \in \mathbb{R}^d$  gleichmäßig verteilt auf der Einheitskugel  $S^{d-1}$ ,  $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| = 1\}$ , ist, und  $R \geq 0$  eine von  $S$  unabhängige ZV ist.

Notation einer sphärischen Verteilung:  $X \sim S_d(\psi)$

**Beispiel 5** Die standard Normalverteilung ist eine sphärische Verteilungen.

Sei  $X \sim N_d(0, I)$ . Dann  $X \sim S_d(\psi)$  mit  $\psi = \exp(-x/2)$ .

Tatsächlich:  $\phi_X(t) = \exp\{it^T 0 - \frac{1}{2}t^T I t\} = \exp\{-t^T t/2\} = \psi(t^T t)$ .

Sei  $X = RS$  die stochastische Darstellung von  $X \sim N_d(0, I)$ . Es gilt  $\|X\|^2 \stackrel{d}{=} R^2 \sim \chi_d^2$ ;

### Simulation einer sphärischen Verteilung:

- (i) Simuliere  $s$  aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in  $\mathcal{S}^{d-1}$  (zB. in dem  $y$  aus einer multivariaten Standard Normalverteilung  $Y \sim N_d(0, I)$  simuliert und  $s = y/\|y\|$  gesetzt wird).
- (ii) Simuliere  $r$  aus  $R$ .
- (iii) Setze  $x = rs$ .

## d) Elliptische Verteilungen

**Definition 5** Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine elliptische Verteilung wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$ , wobei  $Y \sim S_k(\psi)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor und  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix.

Die charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(\exp\{it^T X\}) = E(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T \mu\} E(\exp\{i(A^T t)^T Y\}) \\ &= \exp\{it^T \mu\} \psi(t^T \Sigma t),\end{aligned}$$

wobei  $\Sigma = AA^T$ .

Notation elliptische Verteilungen:  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

$\mu$  heißt Positionsparameter (*location parameter*),

$\Sigma$  heißt Dispersionsparameter (*dispersion parameter*),

$\psi$  heißt charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung.

Falls  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  regulär, dann gilt folgende Relation zwischen elliptischen und sphärischen Verteilungen:

$$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow A^{-1}(X - \mu) \sim S_d(\psi), \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}, AA^T = \Sigma$$

**Theorem 4** ( *Stochastische Darstellung der elliptischen Verteilung* )

Sei  $X \in \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor.

$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$  dann und nur dann wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$ , wobei  $S \in \mathbb{R}^k$  ist ein auf der Einheitskugel  $\mathcal{S}^{k-1}$  gleichverteilter Zufallsvektor,  $R \geq 0$  ist eine von  $S$  unabhängige nicht negative Zufallsvariable,  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix ( $\Sigma = AA^T$ ) und  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor.

**Simulation einer elliptischen Verteilung:**

- (i) Simuliere  $s$  aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in  $\mathcal{S}^{d-1}$  (zB. in dem  $y$  aus einer multivariaten Standard Normalverteilung  $Y \sim N_d(0, I)$  simuliert und  $s = y/\|y\|$  gesetzt wird).
- (ii) Simuliere  $r$  aus  $R$ .
- (iii) Setze  $x = \mu + rAs$ .