Der Hill Schätzer

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F, sodass $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, d.h. $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ mit $L \in RV_0$.

Ziel: Schätzung von α!

Theorem 14 *(Satz von Karamata)*
Sei L eine langsam variierende und lokal beschränkte Funktion auf $[x_0, +\infty)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Für $\kappa > -1$:

$$\int_{x_o}^{x} t^{\kappa} L(t) dt \sim \frac{1}{\kappa + 1} x^{\kappa+1} L(x) \text{ für } x \to \infty$$

(b) Für $\kappa < -1$:

$$\int_{x}^{+\infty} t^{\kappa} L(t) dt \sim -\frac{1}{\kappa + 1} x^{\kappa+1} L(x) \text{ für } x \to \infty$$

Beweis in Bingham et al. 1987.

Annahme: L ist lokal beschränkt in $[u, +\infty)$.

Aus dem Satz von Karamata folgt:

$$E\left(\ln(X) - \ln(u) | \ln(X) > \ln(u)\right) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{\infty} (\ln x - \ln u) dF(x) = \alpha^{-1}. \tag{8}$$

Für die empirische Verteilung $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[x_k,\infty)}(x)$ und eine hohe stichprobenabhängige Schwelle $x_{k,n}$, erhält man:

$$E\left(\ln(X) - \ln(x_{k,n}) | \ln(X) > \ln(x_{k,n})\right) \approx$$

$$\frac{1}{\bar{F}_n(x_{k,n})} \int_{X_{k,n}}^{\infty} (\ln x - \ln x_{k,n}) dF_n(x) = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\ln x_{j,n} - \ln x_{k,n}).$$

Wenn $k = k(n) \to \infty$ und $k/n \to 0$, dann $X_{k,n} \to \infty$ für $n \to \infty$, und dann folgt aus (8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\ln x_{j,n} - \ln x_{k,n}) \stackrel{d}{=} \alpha^{-1}$$

Der untenstehende Hill-Schätzer ist also konsistent:

$$\widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (\ln x_{j,n} - \ln x_{k,n}) \right)^{-1}$$

Wie wird ein passendes k für eine gegebene Stichprobengröße n gewählt?

k zu klein: hohe Varianz des Schätzers!

k zu gross: Schätzer basiert auf zentrale Werte der Verteilung $\Longrightarrow$ Der Schätzer ist verzerrt!

Grafische Inspektion des Hill Plots: $\left\{ \left(k, \widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \right) : k = 2, \ldots, n \right\}$

Für einen gegebenen Schätzer $\widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ von α erhält man folgenden Schätzer für die Randverteilung $\bar{F}$:

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{k}{n} \left(\frac{x}{x_{k,n}} \right)^{-\widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)}}.$$

und folgenden Quantil–Schätzer:

$$\widehat{q}_p = \widehat{F}^{\leftarrow}(p) = \left(\frac{n}{k}(1-p)\right)^{-1/\widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)}} x_{k,n}.$$

Die POT Methode (Peaks over Threshold)

Definition 18 *(Die verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD))*
Die standard GPD G_γ:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1+\gamma x)^{-1/\gamma} & \textit{für } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\{-x\} & \textit{für } \gamma = 0 \end{cases}$$

wobei $x \in D(\gamma)$

$$D(\gamma) = \begin{cases} 0 \leq x < \infty & \textit{für } \gamma \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -1/\gamma & \textit{für } \gamma < 0 \end{cases}$$

oder $G_\gamma(x) = 1-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}$, $x \in D(\gamma)$ für $\gamma \neq 0$, und $G_0 = \lim_{\gamma \to 0} G_\gamma$.

Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$. Eine GPD ist durch die untenstehende Veretilungsfunktion gegeben

$$G_{\gamma,\nu,\beta} = 1 - (1+\gamma\frac{x-\nu}{\beta})^{-1/\gamma}$$

wobei $x \in D(\gamma, \nu, \beta)$ und

$$D(\gamma,\nu,\beta) = \begin{cases} \nu \leq x < \infty & \textit{für } \gamma \geq 0 \\ \nu \leq x \leq \nu - \beta/\gamma & \textit{für } \gamma < 0 \end{cases}$$

Theorem 15 *(Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$)*
Sein $\gamma \in \mathbb{R}$. Die untenstehenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $F \in MDA(H_\gamma)$

(ii) Es existiert eine positive messbare Funktion $a(\cdot)$, sodass für $x \in D(\gamma)$

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \bar{G}_\gamma(x).$$

Definition 19 *(Exzess-Verteilung)*
Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F und rechtem Endpunkt x_F. Für $u < x_F$

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u), x \geq 0$$

heißt Exzess-Verteilungsfunktion über die Schwelle u.

Theorem 16 *(Eine weitere Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$)*
Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $F \in MDA(H_\gamma)$

(ii) Es existiert eine positive messbare Funktion $\beta(\cdot)$, sodass

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{x \in (0, x_F - u)} |F_u(x) - G_{\gamma,0,\beta(u)}(x)| = 0$$

POT: Schätzer für den Tail und das Quantil der Exzess-Verteilung

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion $F \in MDA(H_\gamma)$ für $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Wähle eine hohe Schwelle u (unter Verwendung von geeigneten stat. Verfahren) und berechne

$$N_u = \# \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon X_i > u\}$$

- Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_u}$ eine Stichprobe von Exzess-Beobachtungen. Bestimme $\widehat{\beta}$ und $\widehat{\gamma}$, sodass folgendes gilt:

$$\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\widehat{\gamma}, 0, \widehat{\beta(u)}}(y),$$

  wobei $\bar{F}_u(y) = P(X - u > y | X > u)$

- Kombiniere die obigen zwei Schritte um folgende Schätzer zu berechnen:

$$\bar{F}\widehat{(u + y)} = \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\gamma} \frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}} \tag{9}$$

$$\widehat{q}_p = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\gamma}} \left(\left(\frac{n}{N_u}(1 - p) \right)^{-\widehat{\gamma}} - 1 \right) \tag{10}$$

Wie wird eine hohe Schwelle u (POT Methode) gewählt?

- u zu groß: Wenige Beobachtungen für die Schätzung von $\widehat{\beta}$ und $\widehat{\gamma}$.
- u zu klein: die Approximation $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\widehat{\gamma},\widehat{\beta}(u)}(u)$ ist nicht gut genug.

Grundidee: Inspektion des Plots der empirischen durchschnittlichen Exzess-Funktion und Auswahl einer Schwelle u_0, sodass die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion für $u > u_0$ annähernd linear ist.

Begründung: die Durchschnittliche Exzess-Funktion der $GPD_{\gamma,0,\beta}$ ist linear!

Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d ZV.

Sei $N_u = \#\{i\colon 1 \le i \le n, X_i > u\}$ die Anzahl der Überschreitung von u durch X_i

Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion $e_n(u)$:

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u) I\{X_i > u\}$$

Der Plot der durchschnittlichen Exzess-Funktion: $(X_{k,n}, e_n(X_{k,n}))$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Wenn dieser Plot annähernd linear mit einem positiven Gradienten ist, so wird angenommen, dass die Verteilung einen heavy-tailed Pareto-ähnlichen Tail hat.

Schätzung der Parameter γ und β

Sei u eine gegebene Schwelle und Y_1,Y_2,...,Y_{N_u} Beobachtungen der Überschüsse $X_i > u$, $1 \leq i \leq n$.

Die Log-Likelihood Funktion:

$$\ln L(\gamma, \beta, Y_1, \ldots, Y_{N_u}) = -N_u \ln \beta - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} Y_i\right)$$

wobei $Y_i \geq 0$ für $\gamma > 0$ und $0 \leq Y_i \leq -\beta/\gamma$ für $\gamma < 0$.

$L(\gamma, \beta, Y_1, \ldots, Y_{N_u})$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\gamma,0,\beta}(y)$ unter der Bedingung, dass die Beobachtungen der Überschüsse Y_1,Y_2,...,Y_{N_u} sind.

Für die Ermittlung der Likelihood Funktion siehe Daley, Veve-Jones (2003) and Coles (2001).

Als Schätzer $\widehat{\gamma}$ und $\widehat{\beta}$ werden jene Werte von γ bzw. β verwendet, die die log-Likelihood Funktion maximieren (ML-Schätzer)

Die Methode funktioniert gut für $\gamma > -1/2$.
Die ML-Schätzer sind in diesem Fall normal verteilt:

$$(\widehat{\gamma} - \gamma, \frac{\widehat{\beta}}{\beta} - 1) \sim N(0, \Sigma^{-1}/N_u) \text{ wobei } \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\gamma & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um die Unsicherheit über die einigermaßen willkürliche Auswahl von u zu reduzieren, überprüft man wie die ML-Schätzer in Abhängigkeit von u variieren.

Weiters wird der Schätzer

$$\widehat{\bar{F}(u+y)} = \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\gamma} \frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}}$$

grafisch dargestellt und inspiziert.

Berechnung von Risikomaßen VaR und CVaR mit Hilfe der POT Methode

Seien X_1, X_2, ..., X_n Beobachtungen von i.i.d. ZVen mit unbekannter Verteilungsfunktion F. Direkt aus der POT Methode erhält man folgende Schätzer für die Randverteilung und das Quantil $q_p = VaR_p(F)$ von F

$$\bar{F}\widehat{(u+y)} = \frac{N_u}{n}\left(1+\widehat{\gamma}\frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}}$$

$$\widehat{q}_p = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\widehat{\gamma}} - 1\right)$$

Für $0 < \widehat{\gamma} < 1$ zeigen wir, dass $\widehat{CVaR_p}(F) = \widehat{q}_p + \frac{\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}(\widehat{q}_p-u)}{1-\widehat{\gamma}}$ ein Schätzer von $CVaR_p(F)$ ist.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der folgenden 2 Schritte:

(1) Sei X eine ZV mit $X \sim GPD_{\gamma,0,\beta}$ und $0 < \gamma < 1$. Es gilt

$$CVaR_p(X) = q_p + \frac{\beta + \gamma q_p}{1-\gamma},$$

wobei $q_p := VaR_p(X)$ das p-Quantil von X ist.

(2) Sei X eine ZV mit $X \sim F$. Die Randverteilung $\bar{F}(x)$ wird durch $\bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$ approximiert. Daraus folgt $F \approx \tilde{F}$ mit $\tilde{F} := 1 - \bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$. Für $q_p > u$ ist der CVaR der Approximation $\tilde{F}$ folgendermaßen gegeben:

$$CVaR_p(\tilde{F}) = q_p + \frac{\beta + \gamma(q_p - u)}{1 - \gamma}$$