Beispiel 20 *(Maxima der Exponentialverteilung)*
Sei (X_k) *eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion* F, $F(x) = 1 - e^{-x}$ *für* $x \geq 0$. *Zeigen Sie, dass* $F \in MDA(\Lambda)$ *mit normierenden Konstanten* $a_n = 1$ *und* $b_n = \ln n$.

Beispiel 21 *(Maxima der Cauchy-Verteilung)*
Sei (X_k) *eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion* F *und Dichtefunktion* f, $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie, dass* $F \in MDA(\Phi_1)$ *mit normierenden Konstanten* $a_n = n/\pi$ *und* $b_n = 0$.

Definition 17 *(Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung)*
Die Verteilungsfunktion H_γ *sei folgendermaßen gegeben:*

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\} & \text{wenn } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{cases}$$

wobei $1 + \gamma x > 0$. *D.h. der Definitionsbereich von* H_γ *wird folgendermaßen gegeben:*

$$\begin{array}{ll} x > -\gamma^{-1} & \text{wenn } \gamma > 0 \\ x < -\gamma^{-1} & \text{wenn } \gamma < 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{array}$$

H_γ *heißt verallgemeinerte standard Extremwertverteilung.*

Theorem 9 *(Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$)*

- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma > 0 \iff F \in MDA(\Phi_\alpha)$ *mit* $\alpha = 1/\gamma > 0$.

- $F \in MDA(H_0) \iff F \in MDA(\Lambda)$.

- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma < 0 \iff F \in MDA(\Psi_\alpha)$ *mit* $\alpha = -1/\gamma > 0$.

Theorem 10 *($MDA(\Phi_\alpha)$, Gnedenko 1943)*

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ $(\alpha > 0) \iff \bar{F} \in RV_{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$.
Wenn $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, *dann* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} M_n = \Phi_\alpha$ *mit* $a_n = F^{\leftarrow}(1-n^{-1})$.

Beispiel 22 *Zeigen Sie, dass die untenstehenden Verteilungen dem $MDA(\Phi_\alpha)$ gehören und bestimmen Sie die normierenden Konstanten.*

- *Pareto:* $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x > 1$, $\alpha > 0$.

- *Cauchy:* $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- *Student:* $f(x) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\,\Gamma(\alpha/2)(1+x^2/\alpha)^{(\alpha+1)/2}}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

- *Loggamma:* $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$, $x > 1$, $\alpha, \beta > 0$.

Theorem 11 *($MDA(\Psi_\alpha)$, Gnedenko 1943)*

$F \in MDA(\Psi_\alpha)$ ($\alpha > 0$) $\iff$ $x_F := \sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) < 1\} < \infty$ und $\bar{F}(x_F - x^{-1}) \in RV_{-\alpha}$ ($\alpha > 0$).

Wenn $F \in MDA(\Psi_\alpha)$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - x_F) = \Psi_\alpha$ mit $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$.

Beispiel 23 *Sei $X \sim U(0,1)$. Es gilt $X \in MDA(\Psi_1)$ mit $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 12 *($MDA(\Lambda)$)*

Sei F eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$. $F \in MDA(\Lambda)$ dann und nur dann wenn es ein $z < x_F$ existiert, sodass für F folgende Darstellung gilt:

$$\bar{F}(x) = c(x) exp\Big\{ -\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \Big\}, \forall x, z < x \leq x_F.$$

Für die Funktionen $c(x)$ und $g(x)$ gilt $\lim_{x\uparrow x_F} c(x) = c > 0$ und $\lim_{t\uparrow x_F} g(t) = 1$, und $a(t)$ ist eine positive absolut stetige Funktion, sodass $\lim_{t\uparrow x_F} a'(t) = 0$.

Theorem 13 *($MDA(\Lambda)$, alternative Charakterisierung)*

Eine Verteilungsfunktion F gehört zu $MDA(\Lambda)$ dann und nur dann wenn es eine positive Funktion $\tilde{a}$ existiert, sodass

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x + u\tilde{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-u}, \forall u \in \mathbb{R}$$

Eine mögliche Wahl für $\tilde{a}$ ist $\tilde{a}(x) = a(x)$

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt$$

Die Funktion $a(x)$ heißt durchschnittliche Überschußfunktion (mean excess function):

$$a(x) = E(X - x | X > x), \forall x \leq x_F$$

Einige Verteilungen, die dem $MDA(\Lambda)$ gehören:

- Normal: $F(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Exponential: $f(x) = \lambda^{-1} \exp\{-\lambda x\}$, $x > 0$, $\lambda > 0$.
- Lognormal: $f(x) = (2\pi x^2)^{-1/2} \exp\{-(\ln x)^2/2\}$, $x > 0$.
- Gamma: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\}$, $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$.

Graphische Methoden zur Untersuchung des Verteilungsrandes

- Histogramm

- Quantil-Quantil Plots

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d. ZV mit einer unbekannten Verteilung $\tilde{F}$. Es wird vermutet, dass $\tilde{F}$ am Rand von einer bekannten Verteilung F approximiert wird. Wie kann man diese Vermutung testen?

  Sei $X_{n,n} \le X_{n-1,n} \le \ldots \le X_{1,n}$ eine sortierte Stichprobe aus X_1, X_2,..., X_n.

  qq-plot: $\{(X_{k,n}, F^{\leftarrow}(\frac{n-k+1}{n+1})) \colon k = 1, 2, \ldots, n\}$.

  Bei einer plausiblen Vermutung stellt der qq-plot eine einigermaßen lineare Abhängigkeit dar. Diese Eigenschaft bleibt auch dann erhalten wenn die echte Verteilung und die Referenz-Verteilung nicht übereinstimmen, sondern vom selben Typus sind.

  Faustregel: Je größer das Quantil um so mehr “heavy tailed” ist die Verteilung!