

Klassische Extremwerttheorie

Seien (X_k) , $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F .

Für $n \geq 1$ definiere $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten S_n bzw. M_n ?

Zunächst wird die Grenzverteilung von S_n untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV Z gibt es zwei Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $a_n^{-1}(S_n - b_n) \rightarrow Z$ in Verteilung für $n \rightarrow \infty$.
Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = Z$

Definition 11 Eine ZV X heißt stabil, (α -stabil, Lévy-Stabil), wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und die i.i.d. Kopien X_1 und X_2 von X die Konstanten $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ und $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $c_1 X_1 + c_2 X_2$ und $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$ idente Verteilungsfunktionen haben.

Notation: $c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

Theorem 1 Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.

Beweis zB. in Rényi, 1962.

Theorem 2 Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung X ist folgendermaßen gegeben:

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta\text{signum}(t)z(t, \alpha))\}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$ und

$$z(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln|t| & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

Definition 12 Der Parameter α in (4) heißt Formparameter oder charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt α -stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit G_α bezeichnet.

Definition 13 Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F . Angenommen es existieren die Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$, für eine α -stabile Verteilung G_α , dann heißt es “ F gehört dem Anziehungsgebiet von G_α ”. Notation: $F \in DA(G_\alpha)$.

Anmerkung: $X \sim G_2 \iff \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \iff X \sim N(\gamma, 2c)$

Übung 4 Zeigen Sie, dass $F \in DA(G_2) \iff F \in DA(\phi)$, wobei ϕ die Standard Normalverteilung $N(0, 1)$ ist.

Hinweis: Dazu kann der “Convergence to types”-Satz angewendet werden (siehe die nächste Folie).

Definition 14 Die ZV. Z und \tilde{Z} sind vom selben Typus wenn es $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\tilde{Z} \stackrel{d}{=} (Z - \mu)/\sigma$, d.h. $\tilde{F}(x) = F(\mu + \sigma x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, wobei F und \tilde{F} die Verteilungsfunktionen von Z bzw. \tilde{Z} sind.

Theorem 3 (Convergence to types theorem)

Seien $Z, \tilde{Z}, Y_n, n \geq 1$, ZV, sodass weder Z noch \tilde{Z} fast sicher konstant sind. Seien $a_n, \tilde{a}_n, b_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, Zahlenfolgen mit $a_n, \tilde{a}_n > 0$.

(i) Wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(Y_n - b_n) = Z \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n^{-1}(Y_n - \tilde{b}_n) = \tilde{Z} \quad (5)$$

dann existieren $A > 0$ und $B \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = A \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = B \quad (6)$$

und

$$\tilde{Z} \stackrel{d}{=} (Z - B)/A. \quad (7)$$

(ii) Angenommen (6) gilt. Dann impliziert jede der zwei Relationen in (5) die Andere, und (7) gilt auch.

Beweis: Siehe Resnick 1987, Prop. 0.2, Seite 7.

Theorem 4 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i) Sei ϕ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt:

$$F \in DA(\phi) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^c} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei $[-x, x]^C$ das Komplement von $[-x, x]$ in \mathbb{R} ist.

(ii) Für $\alpha \in (0, 2)$ gilt:

$$F \in DA(G_\alpha) \iff F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei L eine langsam variierende Funktion ist und $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: Sei $F \in DA(G_\alpha)$ für $\alpha \in (0, 2)$. Es gilt dann $E(|X|^\delta) < \infty$ für $\delta < \alpha$ und $E(|X|^\delta) = \infty$ für $\delta > \alpha$.

Beweis: Siehe Resnick 1987, oder eine anspruchsvolle Hausübung !

Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

(X_k) , $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F .

Für $n \geq 1$, $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten M_n ?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n),$$

wobei $u_n = a_n x + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 5 (*Poisson Approximation*)

Sei $\tau \in [0, \infty]$ und eine Zahlenfolge $u_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = \exp\{-\tau\}.$$

Übung 5 Überzeugen Sie sich mit Hilfe des “convergence to type” Satzes, dass H und \tilde{H} vom selben Typus sind, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n^{-1}(M_n - \tilde{b}_n) = \tilde{H}$.

Definition 15 Eine nicht degenerierte ZV X heißt max-stabil wenn für jedes $n \geq 2$ $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ für unabhängige Kopien X_1, X_2, \dots, X_n von X und geeignete Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$.

Theorem 6 Die Klasse von max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Zufallsvariablen überein.

Beweis in McNeil, Frey und Embrechts, 2005.

Theorem 7 (Fischer-Tippet Theorem)

Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV. Wenn die Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, und eine nicht degenerierte Verteilung H existieren, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$, dann ist H vom selben Typus wie eine der untenstehenden drei Verteilungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Fréchet} & \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \\ \text{Weibull} & \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \\ \text{Gumbel} & \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Beweis: Resnick 1987, Seite 9-11.

Die Verteilungen Φ_α , Ψ_α und Λ heißen *standard Extremwertverteilungen*. Verteilungen, die vom selben Typus wie Φ_α , Ψ_α oder Λ heißen *Extremwertverteilungen*.

Definition 16 Die ZV X (oder die dazugehörige Verteilung) gehört zum maximalen Anziehungsgebiet der Extremwertverteilung H wenn die Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H.$$

Notation: $X \in MDA(H)$ ($F \in MDA(H)$).

Theorem 8 (Charakterisierung von MDA)

$F \in MDA(H)$ mit normierenden Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, dann und nur dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für $H(x) = 0$ wird $-\ln H(x)$ durch ∞ ersetzt.

Hinweis zum Beweis: Satz 8 folgt vom Satz 5.

Es gibt auch Verteilungen die zu keinem maximalen Anziehungsgebiet einer Extremwertverteilung gehören!

Beispiel 19 (Die Poisson Verteilung)

Sei $X \sim P(\lambda)$. D.h. $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es keine Extremwertverteilung Z gibt für die $X \in MDA(Z)$.