

Definition 7 Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\}$ heist α -Quantil von F .

Für die Funktion L und seiner Verteilungsfunktion F gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha).$$

Beispiel 8 Sei $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Es gilt $\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$,

wobei Φ die Verteilungsfunktion einer ZV $X \sim N(0, 1)$ ist.

Übung 2 Portfolio PF besteht aus 5 Stück einer Aktie A. Der heutige Preis von A ist $S_0 = 100$. Die täglichen Log-Rendite sind normal verteilt: $X_1 = \ln \frac{S_1}{S_0}$, $X_2 = \ln \frac{S_2}{S_1}, \dots \sim N(0, 0.01)$. Sei L_1 der 1-Tages PF-Verlust von heute auf morgen.

(a) Berechnen Sie $\text{VaR}_{0.99}(L_1)$.

(b) Berechnen Sie $\text{VaR}_{0.99}(L_{100})$ und $\text{VaR}_{0.99}(L_{100}^\Delta)$, wobei L_{100} der 100-Tage PF-Verlust über einen Zeithorizont von 100 Tagen ausgehend von heute ist. L_{100}^Δ ist die Linearisierung des obigen 100-Tage PF-Verlustes.

Hinweis: Für $Z \sim N(0, 1)$ gilt $F_Z^{-1}(0.99) \approx 2.3$.

3. **Conditional Value at Risk** ($CVaR_\alpha(L)$) (oder *Expected Shortfall* (ES))

Ein Nachteil von VaR: Gibt keine Auskunft darüber wie groß der Verlust sein könnte falls $L \geq VaR_\alpha(L)$.

Definition 8 Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L .
 $CVaR_\alpha(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$.

$$CVaR_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}(L))}{P(L \geq q_\alpha(L))} = \frac{1}{1-\alpha} E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{q_\alpha(L)}^{+\infty} l dF_L(l)$$

I_A ist die Indikatorfunktion der Menge A : $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Sei F_L die diskrete Verteilungsfunktion einer Verlustverteilung L und α ein vorgegebenes Konfidenzniveau. Der verallgemeinerte $CVaR$ wird im diskreten Fall folgendermaßen definiert:

$$GCVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha} \left[E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}) + q_\alpha(L) \left(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha(L)) \right) \right]$$

Lemma 1 Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L . Es gilt
 $CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(L) dp$.

Beispiel 9 (a) Sei $L \sim \text{Exp}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\text{CVaR}_\alpha(L)$.

(b) Die Verteilungsfunktion F_L der Verlustfunktion L sei folgendermaßen gegeben: $F_L(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$ für $x \geq 0$ und $\gamma \in (0, 1)$. Bestimmen Sie $\text{CVaR}_\alpha(L)$.

Beispiel 10 Sei $L \sim N(0, 1)$. Seien ϕ und Φ die Verteilungsdichte bzw. Verteilungsfunktion von L . Es gilt $\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$.

Sei $L' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $\text{CVaR}_\alpha(L') = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$ gilt.

Übung 3 Sei die Verteilungsfunktion von L die Student'schen t -Verteilung mit $\nu > 1$ Freiheitsgraden Die Dichtefunktion von L ist

$$g_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Zeigen Sie, dass $\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1}\right)$, wobei t_ν die Verteilungsfunktion von L ist.

Methoden zur Berechnung von VaR und CVaR

Portfoliowert: $V_m = f(t_m, Z_m)$

Z_m ist der Vektor von Risikofaktoren.

Verlustfunktion: $L_{m+1} = l_{[m]}(X_{m+1})$

X_{m+1} ist der Vektor der Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{m+1} = Z_{m+1} - Z_m$.

Beobachtungen (historische Daten): Z_{m-n+1}, \dots, Z_m .

Wie können diese historischen Daten zur Berechnung von $VaR(L_{m+1})$, $CVaR(L_{m+1})$ verwendet werden?

Das empirische VaR bzw. CVaR

Sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Stichprobe der unabhängigen identischverteilten ZV X_1, X_2, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F

(Notation: Die ZV X_1, X_2, \dots, X_n sind i.i.d.)

Empirische Verteilungsfunktion: $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{[x_k, +\infty)}(x)$

Empirisches Quantil: $q_\alpha(F_n) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{\leftarrow}(\alpha)$

Annahme: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dann gilt: $q_\alpha(F_n) = x_{[n(1-\alpha)]+1}$, wobei $[y] = \sup\{n \in \mathbb{N}: n \leq y\}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

$\hat{q}_\alpha(F) := q_\alpha(F_n)$ ist der empirische Schätzer des Quantils $q_\alpha(F)$.

Lemma 2 Sei F eine streng monoton steigende Funktion.

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_\alpha(F) = q_\alpha(F)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, d.h. der Schätzer $\hat{q}_\alpha(F)$ ist konsistent.

Der empirische Schätzer des CVaR ist

$$\widehat{\text{CVaR}}_\alpha(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[n(1-\alpha)]+1} x_k}{[n(1-\alpha)] + 1}$$

Ein nicht-parametrisches Bootstrapping Verfahren zu Ermittlung von Konfidenzintervallen der Schätzer

Seien die ZV X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Stichprobe daraus.

Gesucht: Ein Schätzer eines von F abhängigen Parameters θ , z.B. $\theta = q_\alpha(F)$, und das dazugehörige Konfidenzintervall.

Sei $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ein Schätzer von θ , zB. $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = x_{[(n-1)\alpha]+1,n}$, wobei $x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n}$ die sortierte Stichprobe ist.

Das gesuchte Konfidenzintervall ist ein (a, b) , $a = a(x_1, \dots, x_n)$ u. $b = b(x_1, \dots, x_n)$, sodass $P(a < \theta < b) = p$, für ein vorgegebenes Konfidenzniveau p .

Fall I: F ist bekannt.

Durch Simulation von F werden N Stichproben (N groß) $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, erzeugt.

Sei $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)})$, $1 \leq i \leq N$.

Empirische Verteilungsfunktion von $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$F_N^{\hat{\theta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\tilde{\theta}_i, \infty)} \rightarrow F^{\hat{\theta}} \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Das gesuchte Konf.intervall: $\left(q_{\frac{1-p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}), q_{\frac{1+p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}) \right)$

Fall II: F ist unbekannt.

Empirische Verteilungsfunktion von X_i , $1 \leq i \leq n$, ist:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[x_i, \infty)}(x).$$

n groß $\implies F_n \approx F$.

Wir können Stichproben aus F_n nehmen in dem wir (n) Elemente aus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mit Zurücklegung ziehen.

Angenommen es werden N solche Stichproben gezogen:
 $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$.

Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.

Die empirische Verteilungsfunktion $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\theta_i^*, \infty)}(x)$

approximiert die Verteilungsfunktion $F^{\hat{\theta}}$ von $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ für $N \rightarrow \infty$.

Konfidenzintervall (a, b) : $a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*})$, $b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*})$.

D.h. $a = \theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*$, $b = \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^*$,

wobei $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \geq \theta_{N, N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht.

Zusammenfassung des nicht-parametrischen Bootstrap Verfahrens zur Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben: Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der i.i.d. ZV. X_1, X_2, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F und ein Schätzer $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eines unbekanntes Parameters $\theta(F)$.

Gesucht: Ein Konfidenzintervall I_p für θ mit vorgegebenem Konfidenzniveau p .

- Bilde N neue Stichproben $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$, durch Ziehung mit Zurücklegung aus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.
- $I_p = \left(\theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*, \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^* \right)$, wobei $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \theta_{N, N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht

Eine approximative Lösung ohne Bootstrap

Gegeben: Eine Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n von ZV X_i , $1 \leq i \leq n$, i.i.d. mit unbekannter kontinuierlicher Verteilungsfunktion F .

Gesucht: Ein Konfidenzintervall (a, b) für $q_\alpha(F)$, $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b = b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sodass

$$P(a < q_\alpha(F) < b) = p \text{ und } P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1 - p)/2$$

Wir suchen $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, und das kleinste $p' > p$, sodass

$$P(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}) = p' \quad (*) \quad \text{und}$$

$$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 \text{ und } P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 (**),$$

wobei $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$ durch Sortierung von x_1, x_2, \dots, x_n entsteht.

Sei $Y_\alpha = \#\{x_k: x_k > q_\alpha(F)\}$

Es gilt: $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) = P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j - 1)$

$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) = P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i - 1)$

$Y_\alpha \sim B(n, 1 - \alpha)$. Berechne $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$ und $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$ für unterschiedliche i und j solange bis $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i > j$, gefunden werden, die (*) und (**) erfüllen.