Credit Metrics

Wurde bei J.P.Morgan entwickelt.

Wird in erster Linie für die Evaluierung von Bond Portfolios verwendet. (Siehe Crouhy et al. (2000), J.P.Morgan Inc. (1997))

Basiert auf ein Bonität-Einstufungssystem
(zB. von *Moody* oder von *Standard and Poor's*).

Berücksichtigt die Veränderungen im PF-Wert aufgrund von Veränderungen in den Bonität-Einstufungen.

Sei P ein Portfolio von n Krediten mit einer fixen Laufzeit (zB. 1 Jahr). Sei S_i der Zustand-Indikator von Kreditnehmer i.

Die möglichen Zustände werden mit $0, 1, \ldots, m$ bezeichnet, wobei $S_i = 0$ der Zahlungsunfähigkeit entspricht.

Beispiel 1 *Einstufungssystem von Standard and Poor's*

$m = 7$; *$S_i = 0$ heißt Zahlungsunfähigkeit; $S_i = 1$ oder CCC; $S_i = 2$ oder B; $S_i = 3$ oder BB; $S_i = 4$ oder BBB; $S_i = 5$ oder A; $S_i = 6$ oder AA; $S_i = 7$ oder AAA.*

Für jeden Kreditnehmer wird die Dynamik der Bonität-Einstufungen mit Hilfe einer Markov Kette mit Zustandsmenge $\{0, 1, \ldots, m\}$ und Übergangsmatrix P modelliert.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von historischen Daten geschätzt, zB.:

Ursprüngliche Einstufung	Einstufung am Ende des Jahres							Zahlungs-
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	unfähigkeit
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Recovery Rates

Im Fall einer Zahlungsunfähigkeit hängt die recovery rate von der Einstufung des Kreditnehmers ab. Der Durchschnittswert und die Standardabweichung der recovery rate werden aufgrund von historischen Daten innerhalb jeder Einstufungsklasse geschätzt.

Evaluierung der Bonds im Falle einer Neu-Einstufung

Beispiel 2 *Betrachten wir ein BBB Bond mit Laufzeit* 5 *Jahre.*

Er zahlt jedes Jahr ein Kupon von 6%.

Die forward Zinsstrukturkurven (forward yield curves) für jede Einstufungsklasse sind wie folgt gegeben (in %):

Einstufung	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.73	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Für ein Nennwert von 100 *zahlt der Bond* 6 *Währungseinheiten am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres. Am Ende des 5. Jahres zahlt der Bond* 106 *Währungseinheiten.*

Annahme: Am Ende des ersten Jahres wird der Bond neu als A Bond eingestuft. Wert des Bonds am Ende des ersten Jahres:
$V = 6 + \frac{6}{1+3{,}73\%} + \frac{6}{(1+4{,}32\%)^2} + \frac{6}{(1+4{,}93\%)^3} + \frac{106}{(1+5{,}32\%)^4} = 108.64$

Analog wird der Wert des Bonds am Ende des 1. Jahres ermittelt, falls er zu diesem Zeitpunkt zu anderen Klassen eingestuft wird.

Es wird eine recovery rate von 51.13% im Falle von Zahlungsunfähigekt angenommen.

Einstufung am Ende des 1. Jahres	Wert
AAA	109.35
AA	109.17
A	108.64
BBB	107.53
BB	102.01
B	98.09
CCC	83.63
Zahlungsunfähigkeit	51.13

Wert und Risiko eines Bond-Portfolios in `Credit Metrics`

Die Abhängigkeit der Neueinstufungen unterschiedlicher Bonds und die Wahrscheinlichkeiten von Neueinstufungen von Gruppen von Bonds werden mit Hilfe der dazugehörigen Rendite berechnet.

Die Rendite von Bond i wird als Normalverteilung Y_i modelliert.

Seien d_{Def}, d_{CCC}, ..., $d_{AAA} = +\infty$ Schwellwerte, sodass für ein Kreditnehmer die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einer neuen Stufe S_i am Ende einer vordefinierten Periode folgendermaßen gegeben sind: $P(S_i = 0) = \phi(d_{Def})$, $P(S_i = CCC) = \phi(d_{CCC}) - \phi(d_{Def})$, ..., $P(S_i = AAA) = 1 - \phi(AA)$.

Die Rendite mehrerer Bonds werden mit Hilfe der multivariaten Normalverteilung modelliert.

Die Korrelationsmatrix dieser Verteilung wird in `Credit Metrics` mit Hilfe von Faktormodellen berechnet.

Dann können Gesamtwahrscheinlichkeiten wie

$$P(S_1 = 0, \dots, S_n = 3) = P(Y_1 \le d_{Def}, \dots, d_B < Y_n \le d_{BB})$$

berechnet werden. Als Modell für die Abhängigkeitsstruktur des Vektors $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ wird die Gauss'sche Copula(!) verwendet.

Die Risikomasse eines Kreditportfolios werden mit Hilfe von Simulationen berechnet. Es werden viele Szenarien generiert, aufgrund derer der empirische VaR ermittelt wird.

Die Bernoulli gemischte Verteilung

Der 0-1 Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine Bernoulli gemischte Verteilung (BMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = 1|Z) = f_i(Z) \text{ , } P(X_i = 0) = 1 - f_i(Z)$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \{0,1\}^n$ gilt

$$P(X = x|Z) = \prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i}(1 - f_i(Z))^{1-x_i}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i}(1 - f_i(Z))^{1-x_i}\Big)$$

Annahme: alle Funktionen f_i sind identisch, $f_i = f$. Für die Anzahl der Zahlungsunfähigkeitsfällen $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt $N|Z \sim$ Binomial$(n, f(Z))$.

Die Poisson gemischte Verteilung

Der diskrete Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine Poisson gemischte Verteilung (PMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $\lambda_i: \mathbb{R}^m \to (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Poisson verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = x_i | Z) = \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)} \text{ für } x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt

$$P(X = x | Z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}\Big)$$

Annahme: $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)^T$ ist PMV mit Faktoren Z.

Sei $X_i = I_{[1,\infty)}(\tilde{X}_i)$. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist BMV mit $f_i(Z) = 1 - e^{-\lambda_i(Z)}$

Für $\lambda_i(Z)$ klein gilt $\tilde{N} = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \approx \sum_{i=1}^n X_i$.
$\tilde{N} | Z \sim Poisson(\bar{\lambda}(Z))$ wobei $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z)$.

Beispiele von Bernoulli gemischten Verteilungen

Annahmen:

- Z ist univariat (d.h. es gibt einen Risikofaktor)
- $f_i = f$ für alle i

Es gilt: $P(X_i = 1|Z) = f(Z)$, $\forall i$; $N|Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, f(Z))$.

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Kreditnehmer zahlungsunfähig werden

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) =$$

$$E(P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0|Z)) = E(f(Z)^k(1-f(Z))^{n-k})$$

Sei G die Verteilungsfunktion von Z. Dann gilt:

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1-f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Verteilung der Anzahl N der Zahlungsunfähigen Kreditnehmer :

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1 - f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Beta-gemischte Verteilung

Es gilt $Z \sim Beta(a, b)$ und $f(z) = z$.

Die Dichte g von Z: $g(z) = \frac{1}{\beta(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}$, für $a, b > 0$, $z \in (0, 1)$ wobei $\beta(a, b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz$ die Euler'sche Betafunktion ist.

Verteilung der Anzahl der zahlungsunfähigen Kreditnehmer:

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 z^k (1-z)^{n-k} g(z) dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 z^{a+k-1}(1-z)^{n-k+b-1} dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)}$$ *beta-binomial Verteilung*

Probit-normal Mischung

$Z \sim N(0, 1)$, $f(z) = \phi(\mu + \sigma z)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und ϕ ist die Standard Normalverteilungsfunktion.

Logit-normal Mischung

$Z \sim N(0, 1)$, $f(z) = (1 + \exp\{\mu + \sigma z\})^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

CreditRisk$^+$ - Ein Poisson gemischtes Modell

(Entwickelt von CSFB in 1997, siehe Crouhy et al. (2000) und `http://www.credit_suisse.com/investment_banking/research/en/credit_risk.jsp`

m unabhängige Risikofaktoren $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, $Z_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sodass $E(Z_j) = 1$.

$\lambda_i(Z) = \bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Z_j$, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\bar{\lambda}_i > 0$, α_j, β_j sind Konstante. α_j, β_j werden meistens so gewählt, dass $E\left(\lambda_i(Z)\right) = \bar{\lambda}_i > 0)$ gilt.

Die Dichte von Z_j ist folgendermassen gegeben: $f_j(z) = \frac{z^{\alpha_j - 1} \exp\{-z/\beta_j\}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}$

Verlust bei Kredit i durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i: $LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$, $1 \le i \le n$, wobei λ_i die erwartete deterministische 'Recovery rate' ist und L_i die Höhe von Kredit i ist.

Das Ziel ist, die Verlustverteilung durch eine diskrete Verteilung zu approximieren und für diese die Erzeugende Funktion zu ermitteln.

Sei Y eine diskrete ZV mit Wertebereich $\{y_1, \ldots, y_m\}$ oder eine kontinuierliche ZV mit Dichtefunktion $f(y)$ in $\mathbb{R}$

Definition 1 *Die erzeugende Funktion von Y ist definiert als $g_Y(t) := E(t^Y) = \sum_{i=1}^m t^{y_i} P(Y = y_i)$ bzw. $g_Y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} t^y f(y) dy$ für $t \in [0, 1]$.*

Einige Eigenschaften der erzeugenden Funktionen:

(i) Wenn $Y \sim Bernoulli(p)$ dann $g_Y(t) = 1 + p(t - 1)$.

(ii) Wenn $Y \sim Poisson(\lambda)$, dann $g_Y(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$.

(iii) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$g_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(t).$$

(iv) Sei Y eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und sei $g_{X|Y=y}(t)$ die erzeugenden Funktion von $X|Y = y$. Dann gilt

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{X|Y=y}(t) f(y) dy.$$

(v) Sei $g_X(t)$ die erzeugende Funktion von X. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) \text{ wobei } g_X^{(k)}(t) = \frac{d^k g_X)}{dt^k}.$$

Die Erzeugende Funktion der Verlustverteilung

Jeder Verlust wird als ganzzahliges Vielfaches einer vordefinierten Verlusteinheit L_0 (zB. $L_o = 10^6$ Euro):

$$LGD_i = (1-\lambda_i)L_i \approx \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right] L_0 = v_i L_0 \text{ mit } v_i := \left[\tfrac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right]$$

wobei $[x] = \arg\min_t\{|t-x| \colon t \in \mathbb{Z}, t-x \in (-1/2, 1/2]\}$.

Die Verlustfunktion: $L = \sum_{i=1}^n X_i v_i L_0$.

(a) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $N = X_1 + \ldots + X_n$

$X_i|Z \sim Poisson(\lambda_i(Z))$, $\forall i \Longrightarrow g_{X_i|Z}(t) = \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\}$, $\forall i \Longrightarrow$

$$g_{N|Z}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\} = \exp\{\mu(t-1)\}\,, \qquad (5)$$

mit $\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z) = \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j)$.

$$\begin{aligned} g_N(t) &= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g_{N|Z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j\right)(t-1)\right\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\Big\{(t-1)\sum_{j=1}^{m}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i a_{ij}}_{\mu_j}\Big)z_j)\Big\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m)dz_1\ldots dz_m =$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\{(t-1)\mu_1 z_1\} f_1(z_1)dz_1 \ldots \exp\{(t-1)\mu_m z_m\} f_m(z_m)dz_m =$$

$$\prod_{j=1}^{m}\int_0^\infty \exp\{z_j\mu_j(t-1)\}\frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} z_j^{\alpha_j-1}\exp\{-z_j/\beta_j\}dz_j \tag{6}$$

Die Berechnung der einzelnen Integrale in (6) ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}}\exp\{z_j\mu_j(t-1)\}z_j^{\alpha_j-1}\exp\{-z_j/\beta_j\}dz_j = \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$$

$$\delta_j = \beta_j\mu_j/(1+\beta_j\mu_j). \tag{7}$$

Es gilt also $g_N(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t} \right)^{\alpha_j}$.

(b) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $L = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i L_0$.

Bedingter Verlust aufgrund Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i:

$L_i|Z = v_i(X_i|Z)$; $L_i|Z$ unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$g_{L_i|Z}(t) = E(t^{L_i}|Z) = E(t^{v_i X_i}|Z) = g_{X_i|Z}(t^{v_i}).$$

Die erzeugende Funktion des gesamten Verlusts bedingt durch Z:

$$g_{L|Z}(t) = g_{L_1+L_2+\ldots+L_n|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{L_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i|Z}(t^{v_i}) =$$

$$\exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} Z_j \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij}(t^{v_i} - 1) \right) \right\}.$$

Ähnlich wie bei der Berechnung von $g_N(t)$ erhalten wir:

$$g_L(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j \Lambda_j(t)} \right)^{\alpha_j} \text{ wobei } \Lambda_j(t) = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij} t^{v_i}.$$

δ_j und μ_j sind wie in (7) bzw. (5) gegeben.

Beispiel 3 *Kreditportfolio mit $n = 100$ Krediten, Anzahl der Risikofaktoren $m = 1$ oder $m = 5$, $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda} = 0.15$, für $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_j = \alpha = 1$, $\beta_j = \beta = 1$, $a_{i,j} = 1/m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$*

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} g_N^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \frac{d^k g_N}{dt^k}.$$

Für die Berechnung von $P(N = k)$, $k = 0, 1, \ldots, 100$, kann folgende rekursive Formel verwendet werden:

$$g_N^{(k)}(0) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} g_N^{(k-1-l)}(0) \sum_{j=1}^{m} l! \alpha_j \delta_j^{l+1}, \ k > 1$$

Monte Carlo Methoden in Kreditrisiko-Management

P Kreditportfolio bestehend aus m Krediten;
Verlustfunktion $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$; Die Verluste L_i sind unabhängig bedingt durch einen Vektor Z von ökonomischen Einflussfaktoren.

Gesucht:

$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(L)$, $CVaR_\alpha = E(L|L > q_\alpha(L))$, $CVaR_{i,\alpha} = E(L_i|L > q_\alpha(L))$.

Bei Anwendung von Monte Carlo (MC) Simulation tritt das Problem der Simulation von seltenen Ereignissen auf ("rare event simulation")!

ZB. $\alpha = 0,99$. Nur etwas 1% der standard MC Simulationen führt zu einem Verlust L, sodass $L > q_\alpha(L)$.

Standard MC Schätzer:

$$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)} \sum_{i=1}^{n} L_i I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)$$

wobei L_i der Verlustwert in der i-ten Simulationslauf ist.

$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L)$ ist sehr instabil, d.h. hat eine sehr hohe Varianz, wenn die Anzahl der Simulationen n nicht sehr sehr groß ist.

Grundlagen von "Importance Sampling"

Sei X eine ZV in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit absolut stetiger Verteilungsfunktion und Dichtefunktion f.

Gesucht: $\theta = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$ für eine bekannte Funktion h.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: $h(x) = I_A(x)$.

Berechnung von CVaR: $h(x) = xI_{x>c}(x)$ mit $c = VaR(X)$.

Algorithmus 1 *(Monte Carlo Integration)*

(1) Generiere X_1,X_2,..., X_n unabhängig aus der Dichte f.

(2) Berechne den standard MC Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(MC)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$.

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n^{(MC)} = \theta$.
Im Falle von *seltenen Ereignissen* ($h(x) = I_A(x)$, $P(A) << 1$) ist die Konvergenz sehr langsam.

Sei g eine Wahrscheinlichkeitsdichte, sodass $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Wir definieren das *Likelihood ratio* als: $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) > 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}$

Es gilt:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)g(x)dx = E_g(h(x)r(x)) \tag{8}$$

Algorithmus 2 *(Importance Sampling)*

(1) Generiere X_1,X_2,..., X_n unabhängig aus der Dichte g.

(2) Berechne den IS Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)r(X_i)$.

g heißt "Importance Sampling"-Dichte.

Ziel: Auswahl einer "Importance Sampling"-Dichte, sodass die Variance des IS-Schätzers wesentlich kleiner als die Varianz des standard MC Schätzers ist.

$$var_g\left(\widehat{\theta}_n^{(IS)}\right) = (1/n)(E_g(h^2(X)r^2(X)) - \theta^2)$$

$$var\left(\widehat{\theta}_n^{(MC)}\right) = (1/n)(E(h^2(X)) - \theta^2)$$

Theoretisch kann die Varianz des IS-Schätzers auf 0 reduziert werden!

Annahme $h(x) \geq 0, \forall x$.

Für $g^*(x) = f(x)h(x)/E(h(x))$ gilt: $\widehat{\theta}_1^{(IS)} = h(X_1)r(X_1) = E(h(X))$.

Der IS-Schätzer gibt den richtigen Wert nach einer einzigen Simulation!

Sei $h(x) = I_{\{X \geq c\}}(x)$ wobei $c >> E(X)$ (seltenes Ereignis). Es gilt $E(h^2(X)) = P(X \geq c)$ und aus (8) folgt:

$$E_g(h^2(X)r^2(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r^2(x)g(x)dx = E_g(r^2(X); X \geq c) = \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)f(x)dx = E(r(X); X \geq c) \quad (10)$$

Das Ziel ist g so auszuwählen, dass $E_g(h^2(X)r^2(X))$ klein wird, oder sodass $r(x)$ für $x \geq c$ klein und das Ereignis $X \geq c$ unter der Dichte g wahrscheinlicher als unter der Dichte f ist.

Exponential tilting: Bestimmung des IS-Dichte für “light tailed” Variablen

Sei $M_x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Momentum-generierende Funktion von X:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

IS-Dichte: $g_t(x) = \frac{e^{tx}f(x)}{M_X(t)}$

Likelihood Ratio: $r_t(x) = \frac{f(x)}{g_t(x)} = M_X(t)e^{-tx}$.

Sei $\mu_t = E_{g_t}(X) = E(X \exp\{tX\})/M_X(t)$.

Wie kann man ein geeignetes t für ein bestimmtes IS Problem ermitteln?

Z.B. für die Schätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit?
Das Ziel ist t so zu wählen, dass $E(r(X); X \geq c) = E(I_{X\geq c} M_X(t)e^{-tX})$ klein wird.

$e^{-tx} \leq e^{-tc}$, für $x \geq c$, $t \geq 0 \Rightarrow E(I_{X\geq c} M_X(t)e^{-tX}) \leq M_X(t)e^{-tc}$.

Wir setzten $t = argmin\{M_X(t)e^{-tc}\colon t \geq 0\}$.

Daraus folgt $t = t(c)$ wobei $t(c)$ die Lösung der Gleichung $\mu_t = c$ ist.

(Eine eindeutige Lösung existiert für alle relevanten Werte von c - ohne Beweis).

Exponential Tilting für die Normalverteilung

Sei $X \sim N(0,1)$ mit Dichtefunktion $\phi(x)$.

$g_t(x) = \frac{e^{tx}\phi(x)}{M_X(t)} = \frac{e^{tx}\phi(x)}{e^{t^2/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\}$ und $\mu_t = \frac{E(X \exp\{tX\})}{M_X(t)} = t$

D.h. unter der Verteilung g_t gilt $X \sim N(t,1)$
Die Gleichung $\mu_t = c$ lautet $t = c$.

IS im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Seien f und g Wahrscheinlichkeitsdichten. Definiere zwei Wahrscheinlichkeitsmasse P und Q:

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x)dx \text{ und } Q(A) = \int_{x \in A} g(x)dx$$

Die grundelegende Gleichung der IS (8) lautet dann:

$$\theta = E^P(h(X)) = E^Q(h(X)r(X))$$

Analog: Exponential tilting im Fall von Wahrscheinlichkeitsdichten:

Sei X eine ZV in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sodass $M_X(t) = E^P(\exp\{tX\}) < \infty$, $\forall t$.
Sei $Q_t(A) := E^P\left(\frac{\exp\{tX\}}{M_X(t)}; A\right)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß in $(\Omega, \mathcal{F})$.

Der IS-Algorithmus bleibt gleich:
Simuliere unabhängige Realisierungen von X_i in $(\Omega, \mathcal{F}, Q_t)$ und setze $\hat{\theta}_n^{(IS)} = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i r_t(X_i)$ wobei $r_t(X) = M_X(t) exp\{-tX\}$.

Anwendung von IS auf Bernoulli Mischung Modelle

(siehe Glasserman und Li (2003))

Sei $L = \sum_{i=1}^{m} e_i Y_i$ die Verlustfunktion eines Kreditportfolios.

Y_i sind die Verlustindikatoren mit Default-Wahrscheinlichkeit $\bar{p}_i$ und $e_i = (1-\lambda_i)L_i$ die positiven deterministischen *Exposures* (λ_i sind recovery rates und L_i sind die Kredithöhen), $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei Z ein Vektor von ökonomischen Einflussfaktoren,
sodass $Y_i|Z$ unabhängig sind und $Y_i|(Z = z) \sim Bernoulli(p_i(z))$.

Ziel: Schätzung von $\theta = P(L \geq c)$ mit Hilfe des IS-Ansatzes, für ein gegebenes c, $c >> E(L)$.

Vereinfachter Fall: Y_i sind unabhängig, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei $\Omega = \{0, 1\}^m$ der Raum der Zustände von Y.

Das Wahrscheinlichleitsmaß P in Ω:

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{p}_i^{y_i}(1-\bar{p}_i)^{1-y_i}, \; y \in \{0, 1\}^m.$$

Die Momentum-generierende Funktion von L: $M_L(t) = \prod_{i=1}^{m}(e^{te_i}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_t:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\text{exp}\{te_i y_i\}}{\text{exp}\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i} \bar{p}_i^{y_i} (1 - \bar{p}_i)^{1-y_i} \right).$$

Seien $\bar{q}_{t,i}$ neue Default-Wahrscheinlichlichkeiten:

$$\bar{q}_{t,i} := \text{exp}\{te_i\}\bar{p}_i / (\text{exp}\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i).$$

Somit gilt:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{q}_i^{y_i} (1 - \bar{q}_i)^{1-y_i}, \; y \in \{0,1\}^m.$$

D.h. nach der exponential tilting sind die Default-Indikatoren unabhängig mit neuen Default-Wahrscheinlichkeiten $\bar{q}_{t,i}$.

$\text{lim}_{t \to \infty} \bar{q}_{t,i} = 1$ und $\text{lim}_{t \to -\infty} \bar{q}_{t,i} = 0 \Rightarrow$
$E^{Q_t}(L)$ nimmt alle Werte in $(0, \sum_{i=1}^m e_i)$ an für $t \in \mathbb{R}$.

Für IS-Anwendungen wähle t, sodass $\sum_{i=1}^m e_i \bar{q}_{t,i} = c$.

Allgemeiner Fall: Y_i sind unabhängig bedingt durch Z

1. Schritt: Schätzung der bedingten Überschuss-Wahrscheinlichkeit $\theta(z) := P(L \geq c | Z = z)$ für eine gegebene Realisierung z der ökonomischen Faktoren Z, mit Hilfe des im vereinfachten Fall beschriebenen IS-Ansatzes.

Algorithmus 3 *(IS für die bedingte Verlustverteilung)*

(1) *Für ein gegebenes z berechne die bedingtenn Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ (wie im einfachen Unabhägigkeitsfall) und löse folgende Gleichung:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\exp\{te_i\}p_i(z)}{\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)} = c$$

Die Lösung $t = t(c, z)$ gibt den richtigen tilting-Grad.

(2) *Erzeuge n_1 bedingte Realisierungen des Vektors der Default-Indikatoren $(Y_1, \ldots, Y_m)$. Die einzelnen Indikatoren Y_i, werden unabhängig aus $Bernoulli(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, simuliert, wobei*

$$q_i = \frac{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z)}{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)}$$

(3) *Sei $M_L(t, z) := \prod[\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)]$ die bedingte Moment-erzeugende Funktion von L. Seien $L^{(1)}$, $L^{(2)}$,...,$L^{(n_1)}$ die n_1 bedingten Realisierungen von L für die n_1 simulierten Realisierun-*

gen von $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. *Berechne den* IS*-Schätzer für die Tail-Wahrscheinlichkeit der bedingten Verlustverteilung:*

$$\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) = M_L(t(c,z),z)\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} I_{L^{(j)}\geq c}\,\mathsf{exp}\{-t(c,z)L^{(j)}\}L^{(j)}.$$

2. Schritt: Schätzung der unbedingten Überschuss Wahrscheinlichkeit $\theta = P(L \geq c)$.

Naive Vorgangsweise: Erzeuge mehrere Realisierungen z der Einflussfaktoren Z und berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ für jede dieser Realisierungen. Der gesuchte Schätzer ist der Durchschnittswert der Schätzer $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ über alle Realisierungen z.
Das ist nicht die beste Lösung, siehe Glasserman und Li (2003).

Bessere Herangehensweise: IS für die Einflussfaktoren.

Annahme: $Z \sim N_p(0, \Sigma)$ (zB. probit-normal Bernoulli Mischung)

Die IS-Dichte g ist die Dichte von $N_p(\mu, \Sigma)$ für einen "neuen" Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^p$. Eine gute Wahl von μ sollte zu häufigen Realisierungen z die zu höheren bedingten Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ führen.

Likelihood Ratio:

$$r_\mu(Z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}Z^t\Sigma^{-1}Z\}}{\exp\{-\frac{1}{2}(Z-\mu)^t\Sigma^{-1}(Z-\mu)\}} = \exp\{-\mu'\Sigma^{-1}Z + \frac{1}{2}\mu'\Sigma^{1}\mu\}$$

Algorithmus 4 *(vollständige IS für Bernoulli Mischung Modelle mit Gauss'schen Faktoren)*

(1) Erzeuge $z_1, z_2, \ldots, z_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (n ist die Anzahl der Simulationsrunden)

(2) Für jedes z_i berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$ wie in Algorithmus 3.

(3) Berechne den IS-Schätzer für die unbedingte Überschuss-Wahrscheinlichkeit:

$$\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_\mu(z_i) \widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$$

Die Auswahl von μ

μ soll so gewählt werden, dass die Varianz des Schätzers klein ist.

Idee von Glasserman und Li (2003) (Skizze):

$\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) \approx P(L \geq c|Z = z) \Rightarrow$
Suche eine gute IS-Dichte für die Funktion $z \mapsto P(L \geq c|Z = z)$.

Die optimale IS-Dichte g^* ist proportional zu

$$P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\}.$$

Vorschlag: Wähle eine IS-Dichte mit demselben Modus wie die optimale Dichte g^*.

Das führt zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\mu = \text{argmax}_z \left\{ P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\} \right\}.$$

Exakte Lösung ist schwierig weil $P(L \geq c|Z = z)$ ist i.a. nicht in analytischer Form verfügbar.

Siehe Glasserman und Li (2003) für Lösungsansätze.