Beispiel 11 *Sei* $X_1 \sim Lognormal(0, 1)$ *und* $X_2 \sim Lognormal(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. *Bestimmen Sie* $\rho_{L,min}(X_1, X_2)$ *und* $\rho_{L,max}(X_1, X_2)$.

Beispiel 12 *Betrachten Sie zwei ZV* Z_1 *und* Z_2, *die die Verluste zweier Portfolii darstellen. Sei* $Z_1 \sim N(0, 1)$, $Z_2 \sim N(0, 1)$ *und* $\rho_L(Z_1, Z_2) = 0$.

Geben Sie zwei Zufallsvektoren $(X_1, X_2)^T$ *und* $(Y_1, Y_2)^T$ *mit unterschiedlichen Gesamtverteilungsfunktionen an, für die* $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha) \neq F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$ *gilt und die obigen Annahmen erfüllt sind, d.h.* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim N(0, 1)$ *und* $\rho_L(X_1, X_2) = 0$, $\rho_L(Y_1, Y_2) = 0$,.

Fazit: Aus den Verlustverteilungen der zwei Teilen eines Portfolios und aus der Korrelation der jeweiligen Verluste lassen sich keine Schlüsse über die Verlustverteilung des Gesamtportfolios ziehen.

Kendall's Tau und Spearman's Rho

Seien $(x,y)^T$ und $(\tilde{x},\tilde{y})^T$ zwei Beobachtungen von einem Zufallsvektor $(X,Y)^T$. $(x,y)^T$ und $(\tilde{x},\tilde{y})^T$ heißen *übereinstimmend* falls $(x-\tilde{x})(y-\tilde{y}) > 0$ und *nicht übereinstimmend* falls $(x-\tilde{x})(y-\tilde{y}) < 0$.

Definition 10 *Sei $(X_1,X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen. Der Kendall's Tau ist für $(X_1,X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_\tau(X_1,X_2) = P((X_1-X_1')(X_2-X_2') > 0) - P((X_1-X_1')(X_2-X_2') < 0),$$

wobei $(X_1',X_2')^T$ is eine unabhängige Kopie von $(X_1,X_2)^T$.

Äquivalent: $\rho_\tau(X_1,X_2) = E(sign[(X_1-X_1')(X_2-X_2')])$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$: $\rho_\tau(X) = cov(sign(X-X'))$, wobei $X' \in \mathbb{R}^D$ eine unabhängige Kopie von $X \in \mathbb{R}^d$ ist.

Der Kendall's Tau der Stichprobe:

Sei $\{(x_1,y_1)^T,(x_2,y_2)^T,\ldots,(x_n,y_n)^T\}$ eine Stichprobe von n Beobachtungen des Zufallsvektors $(X,Y)^T$ dessen Randverteilungen stetig sind. Sei c die Anzahl der übereinstimmenden Paare und d die Anzahl der nicht übereinstimmenden Paare aus der Stichprobe.

$$\tilde{\rho}_\tau(X,Y) = \frac{c-d}{c+d} \stackrel{a.s.}{=} \frac{c-d}{n(n-1)/2}$$

Definition 11 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen. Der Spearman's Rho ist für $(X_1, X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3(P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') > 0) - P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') < 0)),$$

wobei $(X_1', X_2')^T$, $(X_1'', X_2'')^T$ unabhängige Kopien von $(X_1, X_2)^T$ sind.

Äquivalente Definition (ohne Beweis):
Seien F_1 und F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$. Es gilt $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_L(F_1(X_1), F_2(X_2))$, d.h. der Spearman's Rho ist die lineare Korrelation der eindeutigen Copula von $(X_1, X_2)^T$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$:
$\rho_S(X) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2), \ldots, F_d(X_d))$ ist die Korrelationsmatrix der eindeutigen Copula von X, wobei F_1,F_2,...,F_d die stetigen Randverteilungen von X sind.

Theorem 16 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und eindeutiger Copula C. Für die Rankkorrelationen $\rho_\tau(X_1, X_2)$ und $\rho_S(X_1, X_2)$ gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3$$

Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S.

- ρ_τ und ρ_S sind symmetrische Abhängigkeitsmaße mit Wertebereich $[-1, 1]$.

- Falls X_1, X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- X_1, X_2 co-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1$. X_1, X_2 anti-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = -1$.

- Seien F_1, F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$ und T_1, T_2 zwei streng monotone Funktionen in $[-\infty, \infty]$. Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_\tau(T_1(X_1), T_2(X_2))$ und $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_S(T_1(X_1), T_2(X_2))$.

(Siehe Embrechts et al., 2002).

Tail Abhängigkeit

Definition 12 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungen* F_1 *und* F_2*. Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von* $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ $(\lambda_L > 0)$ *heißt es,* $(X_1, X_2)^T$ *hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.*

Definition 13 *Sei Copula* C *die Verteilungsfunktion von* $(U_1, U_2, \dots, U_d)$ *mit* $U_i \sim U[0,1]$, $i = 1, 2, \dots, d$. *Die Verteilungsfunktion von* $(1 - U_1, 1 - U_2, \dots, 1 - U_d)$ *heißt "Survival Copula" von* C *und wird mit* $\widehat{C}$ *bezeichnet.*

Lemma 4 *Sei* X *ein Zufallsvektor mit multivariater Tail-Funktion* $\bar{F}$ $(\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_d) = Prob(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_d > x_d))$ *und Randverteilungsfunktionen* F_i, $i = 1, 2, \dots, d$. *Sei* $\bar{F}_i = 1 - F_i$, $i = 1, 2, \dots, d$. *Es gilt*

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \widehat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \dots, \bar{F}_d(x_d))$$

Lemma 5 *Für jede Copula* C *gilt*

$$\widehat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)\,,$$

wobei $\widehat{C}$ *die Survival-Copula von* C *ist.*

Theorem 17 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und Copula* C. *Es gilt*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1 - u} \text{ und}$$

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}$$

vorausgesetzt die Limes existieren.

Beispiel 13 *Die Gumbel Familie von Copulas:*

$$C_\theta^{\mathsf{Gu}}(u_1,u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right),\ \theta \geq 1$$

Es gilt $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$, $\lambda_L = 0$.

Beispiel 14 *Die Clayton Familie von Copulas:*

$$C_\theta^{\mathsf{Cl}}(u_1,u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta},\ \theta > 0$$

Es gilt $\lambda_U = 0$, $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$.

Elliptische Copulas

Definition 14 *Sei X ein d-dimensionaler Zufallsvektor, seien $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ zwei Konstanten, und sei $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $\phi_{X-\mu} = \psi(t^T \Sigma t)$ gilt, wobei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X - \mu$ ist, dann ist X eine elliptisch verteilter Zufallsvektor mit Parameter μ, Σ, ψ: $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$.*

ψ heißt erzeugende Funktion (oder Generator) von X.

Für $d = 1$ stimmen die elliptischen Verteilungen mit den symmetrischen Verteilungen überein.
Überzeugen Sie sich! Verwenden Sie die stochastische Darstellung einer elliptischen Verteilung.

Theorem 18 *(Stochastische Darstellung)*
Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X ist elliptisch verteilt, $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ und $rang(\Sigma) = k$, dann und nur dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$, $A^T A = \Sigma$, sowie eine nicht negative Zufallsvariable R und einen k-dimensionalen auf der Einheitskugel $\mathcal{S}^{k-1} = \{z \in \mathbb{R}^k\colon z^z z = 1\}$ gleichverteilten Zufallsvektor U gibt, sodass R und U unabhängig sind und $X \stackrel{d}{=} \mu + RAU$.

Anmerkung: Eine elliptische Verteilung X ist *radial symmetrisch*: $X - \mu \stackrel{d}{=} \mu - X$.

Definition 15 *Sei* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *mit Verteilungsfunktion* F *und stetigen Randverteilungen* $F_1, F_2, \ldots, F_d$*. Dann wird die eindeutige Copula* C *von* F, $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$, *elliptische Copula genannt.*

Beispiel 15 *Gauss'sche Copulas sind elliptische Copulas*
Sei C_R^{Ga} *die Copula einer* d*-dimensionalen standard Normalverteilung mit Korrelationsmatrix* R*:*

$$C_R^{Ga}(u) = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_d)),$$

wobei ϕ_R^d *die Gesamtverteilungsfunktion einer* d*-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor* 0 *und Korrelationsmatrix* R *und* ϕ^{-1} *die Inverse der Verteilungsfunktion einer univariaten standard Normalverteilung ist. Da die Normalverteilung eine elliptische Verteilung ist, ist dieGauss'sche Copula* C_R^{Ga} *eine elliptische Copula.*

Im bivariaten Fall gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$.

t-Copula: ein weiteres Beispiel elliptischer Copulas

Definition 16 *Sei* $X \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}} AZ \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$*, wobei* $\mu \in \mathbb{R}^d$*,* $\alpha \in \mathbb{N}$*,* $\alpha > 1$*,* $S \sim \chi^2_\alpha$*,* $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ *mit* $AA^t = \Sigma$ *und* $Z \sim N_k(0, I_k)$*, und* S *und* Z *unabhängig sind. Es heißt,* X *hat eine* d*-dimensionale* t*-Verteilung mit Mittelwert* μ *(für* $\alpha > 1$*) und Kovarianzmatrix* $Cov(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2}\Sigma$ *(für* $\alpha > 2$*).* $Cov(X)$ *existiert nicht für* $\alpha \leq 2$*.*

Definition 17 *Die Copula* $C^t_{\alpha,R}$ *von* X *heißt* t*-Copula. Für die* t*-Copula gilt:*

$$C^t_{\alpha,R}(u) = t^d_{\alpha,R}(t_\alpha^{-1}(u_1), \ldots, t_\alpha^{-1}(u_d)).$$

$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$*,* $i, j = 1, 2 \ldots, d$*, ist die Korrelationsmatrix von* Z*,*

$t^d_{\alpha,R}$ *ist die Verteilungsfunktion von* $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}} Z$*, wobei* $S \sim \chi^2_\alpha$ *und* $Z \sim N_k(0, I_k)$ *unabhängig sind, und* t_α *sind die Randverteilungen von* $t^d_{\alpha,R}$*.*

Bivariater Fall ($d = 2$):

$$C^t_{\alpha,R}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\alpha(1-\rho^2)} \right\}^{-(\alpha+2)/2} dx_1 dx_2,$$

für $\rho \in (-1, 1)$. R_{12} ist der lineare Korrelationskoeffizient der dazugehörigen bivariaten t_α-Verteilung für $\alpha > 2$.

Copulas: Weitere Eigenschaften

Definition 18 *(Radiale Symmetrie oder Kugel-Symmetrie)*
Ein Zufallsvektor X (oder eine Verteilungsfunktion) heißt radial symmetrisch (oder kugel-symmetrisch) um den Punkt a wenn $X - a \stackrel{d}{=} a - X$.

Beispiel: Ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \in \mathbb{R}^d$ ist radial-symmetrisch um μ.

Definition 19 *(Radiale Symmetrie von Copulas)*
Eine Copula C heißt radial-symmetrisch wenn

$$(U_1 - 0.5, \ldots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \ldots, 0.5 - U_d) \Longleftrightarrow U \stackrel{d}{=} 1 - U,$$

wobei $(U_1, U_2, \ldots, U_d)$ ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C ist.

Für eine radial symmetrische Copula gilt $C = \widehat{C}$.

Beispiel: Elliptische Copulas sind radial symmetrisch.
Die Gumbel und Clayton Copulas sind es nicht. Überzeugen Sie sich!

Definition 20 *Ein Zufallsvektor X heißt vertauschbar (“exchangeable”) wenn $(X_1,\ldots,X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(d)})$ für jede Permutation $(\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(d))$ von $(1,2,\ldots,d)$.*

Definition 21 *Eine Copula C heißt vertauschbar wenn sie die Gesamtverteilung eines vertauschbaren Zufallsvektors (mit Gleichverteilungen als Randverteilungen) ist.*

Für eine solche Copula gilt:

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_d) \stackrel{d}{=} C(u_{\pi(1)},u_{\pi(2)},\ldots,u_{\pi(d)})$$

für jede Permutation $(\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(d))$ von $(1,2,\ldots,d)$.

Beispiele von vertauschbaren Copulas: Gumbel, Clayton, Gauss'sche Copula C_P^{Ga}, t-Copula $C_{\nu,P}^t$ für den Fall, dass P eine Equikorrelationsmatrix ist: $R = \rho J_d + (1-\rho)I_d$. $J_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist eine Matrix bestehend aus lauter Einser, und $I_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist die d-dimensionale Einheitsmatrix.

Für bivariate vertauschbare Copulas gilt:

$$P(U_2 \le u_2|U_1 = u_1) = P(U_1 \le u_2|U_2 = u_1).$$

Theorem 19 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.*

Korollar 2 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula C_ρ^{Ga}, wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.*

Theorem 20 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein t-verteilter Zufallsvektor mit ν Freiheitsgraden, Mittelwert 0 und linearer Korrelationsmatrix R: $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. Für $R_{12} > -1$ gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 19. Hinweis:

$$X_2 | X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.

Korollar 3 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer* t*-copula* $C^t_{\nu,R}$ *mit* ν *Freiheitsgraden und einer Korrelationsmatrix* R*. Dann gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Theorem 21 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen copula* C^{Ga}_ρ*, wobei* ρ *der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen* X_1 *und* X_2 *ist. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin\rho \text{ und } \rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{2}$$

Korollar 4 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer elliptischen copula* $C^E_{\mu,\Sigma,\psi}$*. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{12}, \text{ wobei } R_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$$

Theorem 22 *Sei* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *ein elliptisch verteilter Vektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{ij}, \text{ wobei } R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \text{ für } i, j = 1, 2, \ldots, d$$

Beweise von Satz 21, Satz 22 und Korollar 4: siehe McNeil et al. (2005).

Archimedische Copulas

Nachteile elliptischer Copulas:

- I.A. keine Darstellung in geschloßener Form möglich
- kugel-symmetrisch

Bivariate Archimedische Copulas

Definition 22 *Sei* $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ *stetig, streng monoton fallend, sodass* $\phi(1) = 0$. *Die pseudo-inverse Funktion* $\phi^{[-1]}\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *von* ϕ *wird folgendermassen definiert:*

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \le t \le \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

$\phi^{[-1]}$ ist stetig und monoton fallend in $[0,\infty]$, streng monoton fallend in $[0,\phi(0)]$ und es gilt:

$$\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u \text{ für } u \in [0,1]$$

$$\phi(\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \phi(0) \\ \phi(0) & \phi(0) \le t \le +\infty \end{cases}$$

Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Theorem 23 *Sei $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ stetig, streng monoton fallend in $[0,1]$, sodass $\phi(1) = 0$, und sei $\phi^{[-1]}$ die pseudo-inverse Funktion von ϕ. Sei $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, sodass $C(u_1,u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1)+\phi(u_2))$. C ist eine Copula dann und nur dann wenn ϕ convex ist. Copula dieser Form heißen Archimedische Copulas. ϕ heißt Generator von C. Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ und $C(u_1,u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1)+\phi(u_2))$.*

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 16 *Gumbel Copulas*
Sei $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$, $t \in [0,1]$.

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right)$$ *ist die Gumbel Copula mit Parameter θ.*

Für $\theta = 1$: $C_1^{Gu} = u_1 u_2$.
$\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Gu} = M(u_1,u_2) = \min\{u_1,u_2\}$.

Die Gumbel Copulas haben eine obere Tail Abhängigkeit.

Beispiel 17 *Clayton Copulas*
Sei $\phi(t) = (t^{-\theta}-1)/\theta$, $\theta > 0$.

$C_\theta^{Cl}(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}$ *ist die Clayton Copula mit Parameter θ.*

$\lim_{\theta\to 0} C_\theta^{Cl} = u_1 u_2$ *und* $\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Cl} = M = \min\{u_1,u_2\}$.

Die Clayton Copulas haben eine untere Tail Abhängigkeit

Beispiel 18 $\phi(t) = 1 - t$, $t \in [0,1]$. $\phi^{[-1]}(t) = \max\{1-t, 0\}$.
$C_\phi(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$.

D.h. die untere Fréchet Schranke ist eine Archimedische Copula.

Theorem 24 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Archimedischen Copula* C *generiert von* ϕ. *Dann gilt* $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$.

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 19 *Kendalls Tau für Gumbel und Clayton Copulas*

Gumbel Copulas: $\phi(t) = (\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Clayton Copulas: $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt = \frac{\theta}{\theta+2}$.