**Lemma 1** *Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion mit $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verallgemeinerte inverse Funktion von $h$. Es gelten dann folgende Aussagen:*

1. *$h$ ist stetig $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ ist streng monoton steigend.*

2. *$h$ ist streng monoton steigend $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ ist stetig.*

3. *$h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$*

4. *$h$ ist streng monoton steigend $\Longrightarrow$ $h^{\leftarrow}(h(x)) = x$.*

5. *$h$ ist stetig $\Longrightarrow$ $h(h^{\leftarrow}(y)) = y$.*

**Lemma 2** *Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F$. Es gilt: $P\left(X = x: F^{\leftarrow}(F(x)) = x\right) = 1$, d.h. $F^{\leftarrow}(F(x)) \stackrel{f.s.}{=} x$*

**Theorem 9** *Sei $G$ eine Verteilungsfunktion in $\mathbb{R}$.*

1. *Quantil-Transformation:*
   *Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.*

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*
   *Sei $Y$ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion $G$. Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.*

**Theorem 10** *(Sklar, 1959)*
*Sei $F\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Es existiert eine Copula $C$, sodass für alle $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)). \tag{4}$$

*Wenn $F_1,\ldots,F_d$ stetig, dann ist $C$ eindeutig.*

*Vice-versa, sei $C$ eine Copula und $F_1,\ldots,F_d$ Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion $F$ aus (4) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$.*

*$C$ aus (4) heißt Copula von $F$. Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion $F$ heißt $C$ auch Copula von $X$.*

**Korollar 1** *Sei $F$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Die eindeutige Copula von $F$ ist folgendermaßen gegeben:*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

**Theorem 11** *(Copula-Invarianz bzgl. streng monotonen Transformationen)*
*Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen $F_1, F_2, \ldots, F_d$ und Copula $C$. Seien $T_1,T_2,\ldots, T_d$ streng monoton steigende Funktionen in $\mathbb{R}$. Dann ist $C$ auch eine Copula von $(T_1(X_1), T_2(X_2), \ldots, T_d(X_d))^T$.*

**Beispiel 9** *Sei $X \sim N_d(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma = R$ die Korrelationsmatrix von $X$ ist. Seien $\phi_R$ und $\phi$ die Verteilungsfunktionen von $X$ bzw. $X_1$. Die Copula von $X$ ist die so genannte Gauss'sche Copula $C_R^{Ga}$:*

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \ldots, \phi^{-1}(u_d)).$$

*$C_R^{Ga}$ ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung $N_d(\mu, \Sigma)$ mit Korrelationsmatrix $R$.*

*Für $d = 2$ und $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$ gilt:*

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$

**Theorem 12** *(Fréchet Schranken)*
*Für jede Copula gilt*

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} u_k - d + 1, 0\right\} \leq C(u_1, u_2, \ldots, u_d) \leq \min\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}.$$

*Notation: Untere Schranke =: $W_d$ und obere Schranke =: $M_d$, für $d \geq 2$. Für $d = 2$ setzen wir $M := M_2$, $W := W_2$.*

**Anmerkung:** Ein analoges Ergebnis wie im Satz 12 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen F mit Randverteilungen $F_i$, $1 \leq i \leq d$:

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} F_k(x_k) - d + 1, 0\right\} \leq F(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)\}.$$

**Beispiel 10** *Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke $W_d$ für $d \geq 3$ keine Copula ist.*

*Hinweis: Verwenden Sie die Mengenfunktion $Q$*

$$Q([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_d, b_d]) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} \ldots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \ldots, u_{dk_d})$$

*wobei $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_k \leq b_k$ und $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.*

**Theorem 13** *(Ohne Beweis)*
*Für jedes $d \geq 3$ und jedes $u \in [0,1]^d$, es existiert eine Copula $C_{d,u}$, sodass $C_{d,u}(u) = W_d(u)$.*

**Anmerkung 1:** Für jedes $d \geq 2$ ist die Fréchet obere Schranke $M_d$ eine Copula.

Überprüfung der 3 Copula-Axiome ist einfach.

**Anmerkung 2:** Weiters sind $M$ und $W$ Copulas.

**Hinweis:** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X$. Seien $Y = T(X)$ und $Z = S(X)$ zwei Zufallsvariablen, wobei $T$ und $S$ zwei streng monotone Funktionen, $T$ steigend und $S$ fallend, sind. Nun ist $M$ die Copula von $(X, T(X))^T$ und $W$ die Copula von $(X, S(X))^T$.

## Co-Monotonie und Anti-Monotonie

**Definition 9** *$X_1$ und $X_2$ heißen co-monoton wenn $M$ eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist. $X_1$ und $X_2$ heißen anti-monoton wenn $W$ eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist.*

**Theorem 14** *Angenommen eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist $W$ oder $M$. Es existieren dann zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable $Z$, sodass*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z)) .$$

*Falls $M$ die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann sind $\alpha$ und $\beta$ monoton steigend, falls $W$ die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann ist $\alpha$ monoton steigend und $\beta$ monoton fallend.*

*Wenn die Randverteilungen $F_1$ und $F_2$ von $(X_1, X_2)^T$ stetig sind, dann gilt:*

$C = W \iff X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$ *monoton fallend*

$C = M \iff X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$ *monoton steigend*

Beweis: In McNeil et al., 2005.

**Theorem 15** *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen $F_1$, $F_2$ und einer nicht spezifizierten Abhängigkeitsstruktur. Sei $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$. Dann gilt:*

1. *Die Menge der möglichen linearen Korrelationen von $X_1$ und $X_2$ ist ein abgeschlossenes Intervall $[\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$ mit $0 \in [\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$.*

2. *Die minimale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn $X_1$ und $X_2$ anti-monoton sind. Die maximale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn $X_1$ und $X_2$ co-monoton sind.*

Im Beweis wird die Höffding'sche Gleichung verwendet:

**Lemma 3** *(Die Höffding'sche Gleichung)*

*Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Gesamtverteilung $F$ und Randverteilungen $F_1$, $F_2$. Wenn $cov(X_1, X_2) < \infty$ dann gilt:*

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1dx_2.$$

Beweis in McNeil et al.,2005.