Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Ein Investor möchte in d (risikoreichen) Assets investieren. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ der Zufallsvektor der Asset-Returns mit $E(X) = \mu$ und $Cov(X) = \Sigma$.

Sei $\mathcal{P}$ die Klasse aller Portfolios bestehend aus den obigen d Aktien.

Jedes (long-short) Portfolio aus $\mathcal{P}$ ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. $w_i > 0$ enstpricht einer Long-Investition und $w_i < 0$ entspricht einer Short-Investition. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \right\}$$

Die Portfoliorendite ist die Zufallsvariable $Z(w) = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i$.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = cov(X)$.

Sei $\mathcal{P}_m$ die Klasse jener PF aus $\mathcal{P}$ sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{P}_m = \{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1, w^T \mu = m \}$$

Das Mean-Variance PF-Opt.modell (Markowitz 1952, 1987) lautet

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} var(Z(w)) \tag{1}$$

oder äquivalent (siehe zB. Campbell et al. (1997))

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{w} & w^T \Sigma w \\ \text{sodass} & \\ & w^T \mu = m \\ & \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \end{array}$$

Sei ρ ein Risikomaß. Das **Mean-ρ PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \rho(Z(w)) \tag{2}$$

Sei $\rho = VaR_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Das **Mean-VaR PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} VaR_\alpha(Z(w)) \tag{3}$$

Frage: Wie hängen die Probleme (1) und (2) (insbesondere (3)) zusammen?

Theorem 7 *Sei M die Menge der erwarteten Rendite der Portfolii aus $\mathcal{P}$. Die Risikofaktoren, d.h. die Rendite der einzelnen Aktien seien elliptisch verteilt, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ für gegebene $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. VaR_α ist koherent auf M, für jedes $\alpha \in (0.5, 1)$.*

Theorem 8 *(Embrechts et al., 2002)*

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, und einem spherisch verteilten Zufallsvektor $Y \sim S_k(\psi)$ und $0 < E(X_k^2) < \infty$, $\forall k$. Sei ρ ein Risikomaß, das die Eigenschaften (C1) und (C3) besitzt, und $\rho(Y_1) > 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente des spherisch verteilten Zufallsvektors Y ist.

Es gilt dann:

$$\mathit{arg}\min\{\rho(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m\} = \mathit{arg}\min\{var(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m\}$$

Einführung in Copulas: Grundlegende Eigenschaften

Definition 8 *Eine d-dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf* $[0,1]^d$ *deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf* $[0,1]$ *sind.*

Oder äquivalent:

Eine Copula C *ist eine Funktion* $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$*, die folgende Eigenschaften hat:*

1. $C(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ *ist mon. steigend in jeder Variable* u_i, $1 \leq i \leq d$.

2. $C(1, 1, \ldots, 1, u_k, 1, \ldots, 1) = u_k$ *für jedes* $k \in \{1, \ldots, d\}$, $u_k \in [0,1]$.

3. *Folgende Ungleichung (sogenannte Rechtecksungleichung) gilt für alle* $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ *mit* $a_k \leq b_k$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, d\}$*:*

$$\sum_{k_1=1}^{2} \cdots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \ldots, u_{dk_d}) \geq 0$$

wobei $u_{j1} = a_j$ *und* $u_{j2} = b_j$.

Anmerkung: Für $2 \leq k \leq d$ sind die k-dimensionalen Randverteilungen einer d-dimensionalen Copula wieder Copulas, k-dimensionale Copulas.

Lemma 1 *Sei* $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine monoton steigende Funktion mit* $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *und* $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die verallgemeinerte inverse Funktion von* h*. Es gelten dann folgende Aussagen:*

1. h *ist stetig* $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ *ist streng monoton steigend.*

2. h *ist streng monoton steigend* $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ *ist stetig.*

3. $h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$

4. h *ist streng monoton steigend* $\Longrightarrow$ $h^{\leftarrow}(h(x)) = x$*.*

5. h *ist stetig* $\Longrightarrow$ $h(h^{\leftarrow}(y)) = y$*.*

Lemma 2 *Sei* X *eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion* F*. Es gilt:* $P\left(X = x: F^{\leftarrow}(F(x)) = x\right) = 1$*, d.h.* $F^{\leftarrow}(F(x)) \overset{f.s.}{=} x$

Theorem 9 *Sei G eine Verteilungsfunktion in $\mathbb{R}$.*

1. *Quantil-Transformation:*
   Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*
   Sei Y eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion G. Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.

Theorem 10 *(Sklar, 1959)*
Sei $F\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Es existiert eine Copula C, sodass für alle $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)). \tag{4}$$

Wenn $F_1,\ldots,F_d$ stetig, dann ist C eindeutig.

Vice-versa, sei C eine Copula und $F_1,\ldots,F_d$ Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (4) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$.

C aus (4) heißt Copula von F. Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion F heißt C auch Copula von X.