**Rang Korrelation**
Die Koeffizienten der Rang Korrelation (Spearmans Rho und Kendalls Tau) sind Maße für die Übereinstimmung von bivariaten Zufallsvektoren.

Seien $(x_1, x_2)$ und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Die zwei Punkte heißen *übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ und *nicht übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$.

Seien $(X_1, X_2)^T$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)^T$ zwei unabhängige Zufallsvektoren mit identischer bivariater Verteilung.

Die Kendall's Tau $\rho_\tau$ ist definiert als

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right)$$

Sei $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ ein dritter von $(X_1, X_2)$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ unahängiger Zufallsvektor mit derselben Verteilung wie $(X_1, X_2)$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Die Spearman's Rho $\rho_S$ ist definiert als

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3\left\{P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) < 0\right)\right\}$$

Einige Eigenschaften von $\rho_\tau$ und $\rho_S$:

- $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ und $\rho_S(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.
- Wenn $X_1$ und $X_2$ unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.
- Sei $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion. Dann gilt:

$$\rho_\tau(T(X_1), T(X_2)) = \rho_\tau(X_1, X_2)$$

$$\rho_S(T(X_1), T(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2)$$

Beweis: 1) und 2) sind trivial. Beweis von 3) erfolgt mit Hilfe von Copulas, später...

## Tail-Abhängigkeit

**Definition 1** *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungen* $F_1$ *und* $F_2$. *Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von* $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

*vorausgesetzt der Limes existiert.*

*Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von* $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

*vorausgesetzt der Limes existiert.*

*Wenn* $\lambda_U > 0$ *(*$\lambda_L > 0$*) heißt es,* $(X_1, X_2)^T$ *hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.*

(Siehe Joe 1997, Schmidt und Stadtmüller 2002)

**Übung 1** *Sei* $X_1 \sim Exp(\lambda)$ *und* $X_2 = X_1^2$. *Bestimmen Sie* $\lambda_U(X_1, X_2)$, $\lambda_L(X_1, X_2)$ *und zeigen Sie, dass* $(X_1, X_2)^T$ *eine obere und eine untere Tail-Abhängigkeit hat. Berechnen Sie auch den linearen Korrelationskoeffizienten* $\rho_L(X_1, X_2)$.

## Multivariate elliptische Verteilungen

## a) Die multivariate Normalverteilung

**Definition 2** *Der Zufallsvektor* $(X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ *hat eine multivariate Normalverteilung (oder eine multivariate Gauss'sche Verteilung) wenn* $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$*, wobei* $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)^T$ *ein Vektor von i.i.d. normalverteilten ZV* ($Z_i \sim N(0, 1)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$), $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ *ist eine konstante Matrix und* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *ist ein konstanter Vektor.*

Für so einen Zufallsvektor $X$ gilt: $E(X) = \mu$, $cov(X) = \Sigma = AA^T$ ($\Sigma$ positiv semidefinit). Notation: $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

**Theorem 1** *(Multivariate Normalverteilung: äquiv. Definitionen)*

1. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ *für einen Vektor* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *und eine positiv semidefinite Matrix* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$*, dann und nur dann wenn* $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d)^T$*, die Zufallsvariable* $a^T X$ *normal verteilt ist.*

2. *Ein Zufallsvektor* $X \in \mathbb{R}^d$ *ist multivariat normal verteilt dann und nur dann wenn seine charakteristische Funktion folgendermaßen gegeben ist:*

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = \exp\{it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t\}$$

*für einen Vektor* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *und eine positiv semidefinite Matrix* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

3. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit $E(X) = \mu$ und $cov(X) = \Sigma$, wobei die Determinante von $\Sigma$ positiv ist ($det(\Sigma) := |\Sigma| > 0$), ist normal verteilt, d.h. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, dann und nur dann wenn seine Dichtefunktion folgendermaßen gegeben ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2} \right\}.$$

Beweis: (siehe zB. Gut 1995)

**Theorem 2** *(Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung)*
*Für $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ gilt:*

*Lineare Kombinationen:*
*Für $B \in \mathbb{R}^{k\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Es gilt dann $BX + b \in N_k(B\mu + b, B\Sigma B^T)$.*

*Randverteilungen:*
*Setze $X^T = \left( X^{(1)^T}, X^{(2)^T} \right)$ für $X^{(1)^T} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^T$ und $X^{(2)^T} = (X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_d)^T$ und analog*

$$\mu^T = \left( \mu^{(1)^T}, \mu^{(2)^T} \right) \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

*Es gilt dann $X^{(1)} \sim N_k\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}\right)$ und $X^{(2)} \sim N_{d-k}\left(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}\right)$.*

Bedingte Verteilungen:

Wenn $\Sigma$ regulär, dann ist auch der bedingte Z.Vektor $X^{(2)}\big|X^{(1)} = x^{(1)}$ multivariat normal verteilt

$$X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{d-k}\Big(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}\Big) \text{ wobei}$$

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Big(x^{(1)} - \mu^{(1)}\Big) \text{ und}$$

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Quadratische Formen:

Wenn $\Sigma$ regulär, dann gilt $D^2 = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim \chi^2_d$.
Die Zufallsvariable $D$ heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ und $Y \sim N_d(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim N_d(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$.

## b) Varianz-gemischte Normalverteilungen

**Definition 3** *Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine multivariate Varianz-gemischte Normalverteilung wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + WAZ$ wobei: $Z \sim N_k(0, I)$, $W \geq 0$ ist eine von $Z$ unabhängige positive Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix, und $I$ ist die Einheitsmatrix.*

Unter der Bedingung $W = w$ ist $X$ normalverteilt: $X \sim N_d(\mu, w^2\Sigma)$, wobei $\Sigma = AA^T$.

$E(X) = \mu$ und $cov(X) = E(W^2AZZ^TA^T) = E(W^2)\Sigma$ falls $E(W^2) < \infty$

**Beispiel 4 Die multivariate $t_\alpha$-Verteilung**
*Sei $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ (Inverse Gamma-Verteilung) mit Dichtefunktion:*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \;\; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

*Dann gilt:*

$$E(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \text{ für } \alpha > 1, \;\; var(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \text{ für } \alpha > 2$$

*Sei $W^2 \sim IG(\alpha/2, \alpha/2)$. Dann ist die Verteilung von $X = \mu + WAZ$ eine multivariate $t_\alpha$ Verteilung mit $\alpha$ Freiheitsgraden: $X \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$.*

$$cov(X) = E(W^2)\Sigma = \frac{\alpha}{\alpha - 2}\Sigma$$

## c) Sphärische Verteilungen

**Definition 4** *Ein Zufallsvektor* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ *hat eine sphärische Verteilung wenn für jede orthogonale Matrix* $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ *die Gleichung* $UX \stackrel{d}{=} X$ *gilt.*

**Theorem 3** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *Der Zufallsvektor* $X \in \mathbb{R}^d$ *hat eine sphärische Verteilung.*

2. *Es existiert eine Funktion* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, sodass die charakteristische Funktion von* $X$ *folgendermaßen gegeben wird:*

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_d^2)$$

3. *Für jeden Vektor* $a \in \mathbb{R}^d$ *gilt* $a^t X \stackrel{d}{=} ||a|| X_1$ *wobei* $||a||^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_d^2$.

4. $X$ *lässt sich als* $X \stackrel{d}{=} RS$ *repräsentieren, wobei der Zufallsvektor* $S \in \mathbb{R}^d$ *gleichmäßig verteilt auf der Einheitskugel* $S^{d-1}$*,* $\mathcal{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d\colon ||x|| = 1\}$*, ist, und* $R \geq 0$ *eine von* $S$ *unabhängige ZV ist.*

Notation einer sphärischen Verteilung: $X \sim S_d(\psi)$

**Beispiel 5** *Die standard Normalverteilung ist eine sphärische Verteilungen.*

*Sei* $X \sim N_d(0, I)$. *Dann* $X \sim S_d(\psi)$ *mit* $\psi = \exp(-x/2)$.

*Tatsächlich:* $\phi_X(t) = \exp\{it^T 0 - \frac{1}{2}t^T I t\} = \exp\{-t^T t/2\} = \psi(t^T t)$.

*Sei* $X = RS$ *die stochastische Darstellung von* $X \sim N_d(0, I)$. *Es gilt* $||X||^2 \stackrel{d}{=} R^2 \sim \chi^2_d$;

**Simulation einer sphärischen Verteilung:**

(i) Simuliere $s$ aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in $\mathcal{S}^{d-1}$ (zB. in dem $y$ aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/||y||$ gesetzt wird).

(ii) Simuliere $r$ aus $R$.

(iii) Setze $x = rs$.

## d) Elliptische Verteilungen

**Definition 5** *Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine elliptische Verteilung wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$, wobei $Y \sim S_k(\psi)$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor und $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ ist eine konstante Matrix.*

Die charakteristische Funktion:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = E(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T\mu\}E(\exp\{i(A^T t)^T Y\})$$

$$= \exp\{it^T\mu\}\psi(t^T\Sigma t),$$

wobei $\Sigma = AA^T$.

Notation elliptische Verteilungen: $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$
$\mu$ heißt Positionsparameter (*location parameter*),
$\Sigma$ heißt Dispersionsparameter (*dispersion parameter*),
$\psi$ heißt charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung.

Falls $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär, dann gilt folgende Relation zwischen elliptischen und sphärischen Verteilungen:

$$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow A^{-1}(X - \mu) \sim S_d(\psi), \; A \in \mathbb{R}^{d\times d}, AA^T = \Sigma$$

**Theorem 4** *( Stochastische Darstellung der elliptischen Verteilung)*

*Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein $d$-dimensinaler Zufallsvektor.*
*$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ dann und nur dann wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$, wobei $S \in \mathbb{R}^k$ ist ein auf der Einheitskugel $\mathcal{S}^{k-1}$ gleichverteilter Zufallsvektor, $R \geq 0$ ist eine von $S$ unahängige nicht negative Zufallsvariable, $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ ist eine konstante Matrix ($\Sigma = AA^T$) und $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor.*

**Simulation einer elliptischen Verteilung:**

(i) Simuliere $s$ aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in $\mathcal{S}^{d-1}$ (zB. in dem $y$ aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/||y||$ gesetzt wird).

(ii) Simuliere $r$ aus $R$.

(iii) Setze $x = \mu + rAs$.

**Beispiel 6** *(Multivariate Normalverteilung)*

*Sei* $X \sim N(\mu, \Sigma)$*. Es existiert eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$*, sodass* $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$ *wobei* $Z \in N_k(0, I)$ *und* $AA^T = \Sigma$*. Weiters gilt* $Z = RS$ *wobei* $S$ *ein gleichmäßig verteilter Zufallsvektor in* $\mathcal{S}^{k-1}$ *ist und* $R^2 \sim \chi^2_k$*. Daraus folgt* $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$ *und daher* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *mit* $\psi(x) = \exp\{-x/2\}$*.*

**Beispiel 7** *(Multivariate normal variance mixture)*

*Sei* $Z \sim N_d(0, I)$ *ein normal-verteilter Zufallsvektor.* $Z$ *ist sphärisch-verteilt mit stochastischer Darstellung* $Z \stackrel{d}{=} VS$ *wobei* $V^2 = ||Z||^2 \sim \chi^2_d$*. Sei* $X = \mu + WAZ$ *eine Varianz-gemischte Normalverteilung. Dann gilt* $X \stackrel{d}{=} \mu + VWAS$ *wobei* $V^2 \sim \chi^2_d$ *und* $VW$ *eine nicht-negative von* $S$ *unabhängige ZV ist. D.h.,* $X$ *ist elliptisch verteilt mit* $R = VW$*.*

**Theorem 5** *(Eigenschaften der elliptischen Verteilung)*

*Sei $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$. $X$ hat folgende Eigenschaften:*

**Lineare Kombinationen:**

*Für $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$ gilt:*

$$BX + b \in E_k(B\mu + b, B\Sigma B^T, \psi).$$

**Randverteilungen:**

*Setze $X^T = \left(X^{(1)^T}, X^{(2)^T}\right)$ für*
*$X^{(1)^T} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ und $X^{(2)^T} = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_k)^T$ und analog*
*$\mu^T = \left(\mu^{(1)^T}, \mu^{(2)^T}\right)$ sowie $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}$. Es gilt dann*
*$X_1 \sim N_n\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}, \psi\right)$ und $X_2 \sim N_{k-n}\left(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}, \psi\right)$.*

**Bedingte Verteilungen:**

Wenn $\Sigma$ regulär, dann ist auch die bedingte Verteilung $X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)}$ elliptisch verteilt:

$$X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{k-n}\Big(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}, \tilde{\psi}\Big)$$

wobei

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Big(x^{(1)} - \mu^{(1)}\Big)$$

und

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Typischerwise sind $\tilde{\psi}$ und $\psi$ unterschiedlich (siehe Fang, Katz und Ng 1987).

**Quadratische Formen:**

Wenn $\Sigma$ regulär, dann gilt

$$D^2 = (X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu) \sim R^2.$$

wobei $R$ die nicht-negative ZV aus der stochastischen Darstellung $Y = RS$ der spherischen Verteilung $Y$ mit $S \sim U\left(\mathcal{S}^{(d-1)}\right)$ und $X = \mu + AY$ ist. Die Zufallsvariable $D$ heißt *Mahalanobis Distanz*.

**Faltung:**

Seien $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$ und $Y \sim E_k(\tilde{\mu}, \Sigma, \tilde{\psi})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim E_k(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma, \bar{\psi})$ wobei $\bar{\psi} = \psi\tilde{\psi}$.

Achtung: $\Sigma$ muss i.a. dieselbe für $X$ und $Y$ sein.

Anmerkung: Aus $X \sim E_k(\mu, I_k, \psi)$ folgt nicht, dass die Komponenten von $X$ unabhängig sind. Die Komponenten von $X$ sind dann und nur dann unabhängig wenn $X$ multivariat normalverteilt mit der Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix ist.

## Koherente Risikomaße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignismenge $\Omega$, Ereignisalgebra $\mathcal{F}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß $P$.

Sei $L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller Zufallsgrößen aus $(\Omega, \mathcal{F})$, die fast sicher endlich sind.

Sei $M \subseteq L^{(0)}$.

Sei $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ ein Risikomaß in $M$

**Definition 6** *Ein Risikomaß $\rho$, das folgende Eigenschaften besitzt, heißt koherent auf $M$:*

(C1) *Invarianz bzgl. Translation:*

$\rho(X + r) = \rho(X) + r$, *für jede Konstante $r$ und jedes $X \in M$.*

(C2) *Subadditivität:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

(C3) *Positive Homogenität:*

$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in M$.

(C4) *Monotonie:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $X_1 \overset{f.s.}{\leq} X_2 \Longrightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

**Konvexe Risikomaße**

Betrachte die Eigenschaft

(C5) Konvexität:

$\forall X_1, X_2 \in M$, $\forall \lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

(C5) ist schwächer als (C2) und (C3), d.h. (C2) und (C3) zusammen implizieren (C5) aber nicht umgekehrt.

**Definition 7** *Ein Risikomaß $\rho$, das die Eigenschaften (C1),(C4) und (C5) besitzt, heißt konvex auf $M$.*

**Beispiel 8** *VaR ist nicht koherent*

*Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ durch einer beliebigen kontinuierlichen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung $F$ definiert.*

$VaR_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ *besitzt die Eigenschaften (C1), (C3) und (C4).*

*Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ durch die Binomialverteilung $B(p,n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, definiert.*

**Beispiel 8** (Folgerung)

$VaR_\alpha(B(p,n))$ ist nicht subadditiv.

ZB.: Berechnen Sie den VaR der Verluste eines Bond-Portfolios bestehend aus 100 Bonds, die unabhängig von einander mit Wahrscheinlichkeit $p$ defaultieren. Beobachten Sie, dass dieser Wert größer als das Hunderfache des VaRs des Verlustes eines einzigen Bonds ist.

**Theorem 6** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $M \subseteq L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definierten Zufallsvariablen mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung $F$. $CVaR_\alpha$ ist eine koherentes Risikomaß in M, $\forall \alpha \in (0,1)$.*