Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

(X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$, $M_n := \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten M_n?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n\to\infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n),$$

wobei $u_n = a_n x + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 5 *(Poisson Approximation)*
Sei $\tau \in [0, \infty]$ und eine Zahlenfolge $u_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \iff \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = exp\{-\tau\}.$$

Übung 5 *Überzeugen Sie Sich mit Hilfe des "convergence to type" Satzes, dass H und $\tilde{H}$ vom selben Typus sind, wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$ *und* $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(M_n - \tilde{b}_n) = \tilde{H}$*.*

Definition 15 *Eine nicht degenerierte ZV X heißt max-stabil wenn für jedes $n \geq 2$* $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} a_n X + b_n$ *für unabhängige Kopien X_1,X_2, ...,X_n von X und geeignete Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$.*

Theorem 6 *Die Klasse von max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Zufallsvariablen überein.*

Beweis in McNeil, Frey und Embrechts, 2005.

Theorem 7 *(Fischer-Tippet Theorem)*
Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV. Wenn die Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, und eine nicht degenerierte Verteilung H existieren, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$*, dann ist H vom selben Typus wie eine der untenstehenden drei Verteilungen:*

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Fréchet} & \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\
\textit{Weibull} & \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\
\textit{Gumbel} & \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} & x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Beweis: Resnick 1987, Seite 9-11.

Die Verteilungen Φ_α, Ψ_α und Λ heißen *standard Extremwertverteilungen*. Verteilungen, die vom selben Typus wie Φ_α, Ψ_α oder Λ heißen *Extremwertverteilungen*.

Definition 16 *Die ZV X (oder die dazugehörige Verteilung) gehört zum maximalen Anziehungsgebiet der Extremwertverteilung H wenn die Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H.$$

Notation: $X \in MDA(H)$ ($F \in MDA(H)$).

Theorem 8 *(Charakterisierung von MDA)*
$F \in MDA(H)$ mit normierenden Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ dann und nur dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für $H(x) = 0$ wird $-\ln H(x)$ durch ∞ ersetzt.

Hinweis zum Beweis: Satz 8 folgt vom Satz 5.

Es gibt auch Verteilungen die zu keinem maximalen Anziehungsgebiet einer Extremwertverteilung gehören!

Beispiel 19 *(Die Poisson Verteilung)*
Sei $X \sim P(\lambda)$. D.h. $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es keine Extremwertverteilung Z gibt für die $X \in MDA(Z)$.

Beispiel 20 *(Maxima der Exponentialverteilung)*
Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F, $F(x) = 1 - e^{-x}$ für $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass $F \in MDA(\Lambda)$ mit normierenden Konstanten $a_n = 1$ und $b_n = \ln n$.

Beispiel 21 *(Maxima der Cauchy-Verteilung)*
Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f, $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $F \in MDA(\Phi_1)$ mit normierenden Konstanten $a_n = n/\pi$ und $b_n = 0$.

Definition 17 *(Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung)*
Die Verteilungsfunktion H_γ sei folgendermaßen gegeben:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\} & \textit{wenn } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \textit{wenn } \gamma = 0 \end{cases}$$

wobei $1 + \gamma x > 0$. D.h. der Definitionsbereich von H_γ wird folgendermaßen gegeben:

$$\begin{array}{ll} x > -\gamma^{-1} & \textit{wenn } \gamma > 0 \\ x < -\gamma^{-1} & \textit{wenn } \gamma < 0 \\ x \in \mathbb{R} & \textit{wenn } \gamma = 0 \end{array}$$

H_γ heißt verallgemeinerte standard Extremwertverteilung.

Theorem 9 *(Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$)*

- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma > 0 \iff F \in MDA(\Phi_\alpha)$ *mit* $\alpha = 1/\gamma > 0$.
- $F \in MDA(H_0) \iff F \in MDA(\Lambda)$.
- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma < 0 \iff F \in MDA(\Psi_\alpha)$ *mit* $\alpha = -1/\gamma > 0$.

Theorem 10 *($MDA(\Phi_\alpha)$, Gnedenko 1943)*

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ $(\alpha > 0) \iff \bar{F} \in RV_{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$.
Wenn $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, *dann* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} M_n = \Phi_\alpha$ *mit* $a_n = F^{\leftarrow}(1-n^{-1})$.

Beispiel 22 *Zeigen Sie, dass die untenstehenden Verteilungen dem $MDA(\Phi_\alpha)$ gehören und bestimmen Sie die normierenden Konstanten.*

- *Pareto:* $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x > 1$, $\alpha > 0$.
- *Cauchy:* $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Student:* $f(x) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\,\Gamma(\alpha/2)(1+x^2/\alpha)^{(\alpha+1)/2}}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Loggamma:* $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}$, $x > 1$, $\alpha, \beta > 0$.