Proposition 2 *(i) Eine meßbare Funktion $h\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ hat eine reguläre Variation um $+\infty$, wenn eine Funktion g existiert, sodass*

$$\lim_{t\to+\infty} h(tx)/h(t) = g(x), \ \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt $g(x) = x^\rho$ für ein $\rho \in \mathbb{R}$ und dann $h \in RV_\rho$.

(ii) Eine monotone Funktion $h\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ hat eine reguläre Variation um $+\infty$, wenn eine Folge (a_n) von positiven Zahlen und eine Funktion ξ existieren, sodass

$$\lim_{n\to+\infty} nh(a_n x) = \xi(x), \ \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt $\xi(x)/\xi(1) = x^\rho$ für ein $\rho \in \mathbb{R}$ und dann $h \in RV_\rho$.

Siehe Resnick 1987 für ein Beweis.

Beispiel 17 *Seien X_1 und X_2 zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F, $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$. Annahme: X_1 (X_2) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie A_1 (A_2) an. Es wird weiters angenommen, dass A_1 und A_2 gleich viel kosten. Ein Investor hat 2 Stück der Aktie A_1 gekauft. Die Wahrsch., dass sein Verlust grösser als l ist, wird durch $P(2X_1 > l)$ gegeben. Kann der Investor die Verlustwahrsch. verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie A_1 und einem Stück der Aktie A_2 wechselt?*

Beispiel 18 *Seien X und Y zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (Brand- bzw. Autoversicherung). Sei* F *die Verteilungsfunktion von* X *für die* $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, *gilt. Es gelte weiters* $E(Y^k) < \infty$, $\forall k > 0$. *Die Versicherungsgesellschaft möchte* $\lim_{x\to\infty} P(X > x|X + Y > x)$ *ermitteln, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines grossen Verlustes bei der Brandversicherung, berechnen, vorausgesetzt es gibt einen grossen Gesamtverlust der zwei Linien.*

Klassische Extremwerttheorie

Seien (X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$ definiere $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $M_n :=$ max$\{X_i \colon 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten S_n bzw. M_n?

Zunächst wird die Grenzverteilung von S_n untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV Z gibt es zwei Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $a_n^{-1}(S_n - b_n) \longrightarrow Z$ in Verteilung für $n \to \infty$.
Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = Z$

Definition 11 *Eine ZV X heisst stabil, wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und die i.i.d. Kopien X_1 und X_2 von X die Konstanten $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ und $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $c_1X_1 + c_2X_2$ und $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$ idente Verteilungsfunktionen haben.*

Notation: $c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

Theorem 1 *Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.*

Beweis zB. in Rényi, 1962.

Theorem 2 *Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung X ist folgendermaßen gegeben:*

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta \text{signum}(t) z(t,\alpha))\}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$ *und*

$$z(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \textit{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln|t| & \textit{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

Definition 12 *Der Parameter α in (4) heißt charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt α-stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit G_α bezeichnet.*

Definition 13 *Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F. Angenommen es existieren die Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$, *für eine α-stabile Verteilung G_α, dann heißt es “F gehört dem Anziehungsgebiet von G_α”. Notation: $F \in DA(G_\alpha)$.*

Anmerkung: $X \sim G_2 \Longleftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \Longleftrightarrow X \sim N(\gamma, 2c)$

Übung 4 *Zeigen Sie, dass $F \in DA(G_2) \Longleftrightarrow F \in DA(\phi)$, wobei ϕ die Standard Normalverteilung $N(0,1)$ ist.*

Hinweis: Dazu kann der “Convergence to types”-Satz angewendet werden (siehe die nächste Folie).

Definition 14 *Die ZV.* Z *und* $\tilde{Z}$ *sind vom selben Typus wenn es* $\sigma > 0$ *und* $\mu \in \mathbb{R}$ *existieren, sodass* $\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z - \mu)/\sigma$, *d.h.* $\tilde{F}(x) = F(\mu + \sigma x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, *wobei* F *und* $\tilde{F}$ *die Verteilungsfunktionen von* Z *bzw.* $\tilde{Z}$ *sind.*

Theorem 3 *(Convergence to types theorem)*
Seien Z, $\tilde{Z}$, Y_n, $n \geq 1$, *ZV. Weder* Z *noch* $\tilde{Z}$ *sind fast sicher konstant. Seien* $a_n, \tilde{a}_n, b_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *Zahlenfolgen mit* $a_n, \tilde{a}_n > 0$.

(i) Wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(Y_n - b_n) = Z \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(Y_n - \tilde{b}_n) = \tilde{Z} \tag{5}$$

dann existieren $A > 0$ *und* $B \in \mathbb{R}$, *sodass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = A \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = B \tag{6}$$

und

$$\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z - B)/A. \tag{7}$$

(ii) Angenommen (6) gilt. Dann impliziert jede der zwei Relationen in (5) die Andere, und (7) gilt auch.

Beweis: Siehe Resnick 1987,Prop. 0.2, Seite 7.

Theorem 4 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i) *Sei ϕ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt:*

$$F \in DA(\phi) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^C} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei $[-x,x]^C$ das Komplement von $[-x,x]$ in $\mathbb{R}$ ist.

(ii) *Für $\alpha \in (0,2)$ gilt:*

$$F \in DA(G_\alpha) \Longleftrightarrow F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei L eine langsam variierende Funktion ist und $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: Sei $F \in DA(G_\alpha)$ für $\alpha \in (0,2)$. Es gilt dann $E(|X|^\delta) < \infty$ für $\delta < \alpha$ und $E(|X|^\delta) = \infty$ für $\delta > \alpha$.

Beweis: Siehe Resnick 1987, oder eine anspruchsvolle Hausübung !