Was ist Kreditrisiko?

Zitat von McNeil, Frey und Embrechts (2005):

Credit risk is the risk that the value of a portfolio changes due to unexpected changes in the credit quality of issuers or trading partners. This subsumes both losses due to defaults and losses caused by changes in credit quality such as the downgrading of a counterparty in an internal or external rating system

Beispiele Kreditrisiko-behaftete Finanzinstrumente

- Portfolios von Unternehmensanleihen

- OTC ("over the counter") Transaktionen

- Handel im Bereich der Kreditderivate

Kreditrisiko: ein einfaches Modell

P: Portfolio von n risikoreichen Anleihen in der Höhe L_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

p_i: Wahrscheinlichkeit, dass Kreditnehmer i zahlungsunfähig wird.

$1 - \lambda_i$: Anteil des Verlustes aus Anleihe i falls Kreditnehmer i zahlungsunfähig wird. $\lambda_i \in [0, 1]$ heißt "recovery rate" von Anleihe i.

Verlust in Falle von Zahlungsunfähigkeit ("loss-given-default"):

$$LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$$

Bernoulli ZV X_i: Status des Kreditnehmers i zum Zeitpunkt T

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist zahlungsunfähig} \\ 0 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist nicht zahlungsunfähig} \end{cases}$$

Es gilt $p_i = P(X_i = 1)$
Gesamtverlust zum Zeitpunkt T:

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot LGD_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (1 - \lambda_i) L_i$$

.

Verteilung von L hängt von der Gesamtverteilung von $(X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ ab.

Das einfachste Modell:

- $L_i = L_1$, $\forall i$
- recovery rates sind deterministisch und $\lambda_i = \lambda_1$, $\forall i$
- X_i sind i.i.d. mit Wahrscheinlichkeit p

Dann gilt $L = LGD_1 \cdot N$ mit $N = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, p)$.

Modelle mit latenten Variablen

Die Kreditnehmer werden in $m + 1$ homogenen Kategorien geteilt; alle Kreditnehmer einer Gruppe haben dieselbe Wahrscheinlichkeit zahlungsunfähig zu werden (*default Wahrscheinlichkeit*).

Historische Beobachtungen der Anzahl der Kreditnehmer einer Kategorie, die Zahlungsunfähig werden $\Longrightarrow$ Schätzung der Default Wahrscheinlichkeit für Kreditnehmer der entsprechenden Kategorie.

Status Variable $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$, $S_i \in \{0, 1, \ldots, m\}$,
$S_i = 0$ entspricht der Zahlungsunfähigkeit
$S_i = j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ entspricht den unterschiedlichen Einteilungskategorien, könnten zB. Rating Klassen sein.

Dann gilt $X_i = \begin{cases} 0 & S_i \neq 0 \\ 1 & S_i = 0 \end{cases}$

$S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)^T$ wird mit Hilfe der latenten Variablen $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ modelliert.

Y_i könnte zB. der Wert der Aktien von Kreditnehmer i.

Seien d_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m+1$ Schwellwerte, sodass $d_{i,0} = -\infty$ und $d_{i,m+1} = \infty$.

Dann gilt: $S_i = j \Longleftrightarrow Y_i \in (d_{i,j}, d_{i,j+1}]$.

Sei F_i die Verteilungsfunktion von Y_i

Default Wahrscheinlichkeit: $p_i = F_i(d_{i,1})$.

Wahrsch., dass die ersten k Kreditnehmer zahlungsunfähig werden:

$$p_{1,2,\ldots,k} = P(Y_1 \leq d_{1,1}, Y_2 \leq d_{2,1}, \ldots, Y_k \leq d_{k,1})$$

$$= C(F_1(d_{1,1}), F_2(d_{2,1}), \ldots, F_k(d_{k,1}), 1, 1, \ldots, 1) = C(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1, \ldots, 1)$$

D.h. die Gesamt-default-Wahrscheinlichkeit hängt wesentlich von der Copula C ab.

Das KMV Modell (siehe auch `www.moodyskmv.com`)

Die Status Variablen $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ können nur zwei Werte 0 und 1 annehmen, d.h. $m = 1$.

Die latenten Variablen $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ hängen mit dem Wert der Aktien der jeweiligen Firmen folgendermaßen zusammen.

Das Modell von Merton

Die Bilanz jeder Firma besteht aus 2 Positionen:
Aktiva (Aktien) und Passiva (Liabilities and Equities).

Die Passiva bestehen aus Schulden ("Liabilities") und Stammkapital ("Equity").

$V_{A,i}(T)$: Wert der Aktien der Firma i zum Zeitpunkt T

$K_i(T) =: K_i$: Wert der Schulden der Firma i zum Zeitpunkt T

$V_{E,i}(T)$: Wert des Stammkapitals der Firma i zum Zeitpunkt T

Annahme: Zukünftiger Wert der Aktien wird als geometrische Brown'sche Bewegung modelliert

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t)\exp\left\{\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma^2_{A,i}}{2}\right)(T-t) + \sigma_{A,i}\left(W_i(T) - W_i(t)\right)\right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift, $\sigma_{A,i}$ ist die Volatilität und $(W_i(t) : 0 \leq t \leq T)$ ist eine Standard Brown'sche Bewegung (Wiener Prozess).

D.h. $(W_i(T) - W_i(t)) \sim N(0, T-t)$.

Daraus folgt $\ln V_{A,i}(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$
mit $\mu = \ln V_{A,i}(t) + \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma^2_{A,i}}{2}\right)(T-t)$ und $\sigma^2 = \sigma^2_{A,i}(T-t)$.

Weiters gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T))$

Setze $Y_i = \frac{W_i(T)-W_i(t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$.

Dann gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T)) = I_{(-\infty,-DD_i)}(Y_i)$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + (\mu_{A,i} - \frac{\sigma^2_{A,i}}{2})(T-t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}} \tag{1}$$

DD_i heißt *distance-to-default*.

Berechnung des "distance to default"

Schwierigkeit: $V_{A,i}(t)$ kann nicht beobachtet werden
Aber $V_{E,i}(t)$ kann beobachtet werden.

KMVs Auffassung: Die Geldgeber besitzen die Firma solange die Schulden seitens der Stammkapitalbesitzer (Equity holders) nicht vollständig bezahlt werden

$$\Downarrow$$

$V_{E,i}(T)$ ist daher der Preis einer Call Option über die Aktien der Firma mit Strike Price den Buchwert der Schulden zum Zeitpunkt T:

$$V_{E,i}(T) = \max\{V_{A,i}(T) - K_i, 0\}$$

Aus der Black-Scholes Formula (Optionspreistheorie):

$$V_{E,i}(t) = C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) = V_{A,i}(t)\phi(e_1) - K_i e^{-r(T-t)}\phi(e_2) \qquad (2)$$

wobei

$$e_1 = \frac{\ln(V_{A,i}(t) - \ln K_i + (r + \sigma_{A,i}^2/2)(T-t)}{\sigma_{A,i}(T-t)} \text{ und } e_2 = e_1 - \sigma_{A,i}(T-t)$$

ϕ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung und r ist der risikofreie Zinssatz.

Im KMV Modell gilt weiters:

$$\sigma_{E,i} = g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \tag{3}$$

Beobachtung/Schätzung von $V_{E,i}(t)$ bzw. $\sigma_{E,i}$ aus historischen Beobachtungen

$$\Downarrow$$

Einsetzen in (2) und (3) und Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} V_{E,i}(t) &= C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) \\ \sigma_{E,i} &= g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \end{aligned} \tag{4}$$

um $V_{A,i}(t)$ und $\sigma_{A,i}$ zu ermitteln

$$\Downarrow$$

Verwendung dieser Werte zur Berechnung von DD_i aus (1).

Die erwartete Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit (expected default frequency, EDF)

KMV Modell evaluiert nicht direkt die Default Wahrscheinlichkeit $p_i = P(Y_i < -DD_i)$

Ermittlung von Firmen die historisch gesehen je einen "distance-to-default" von ca. DD_i hatten.

Ermittlung der Häufigkeit von Zahlungsunfähigkeit für diese Firmen als Schätzer für die Default-Wahrscheinlichkeit p_i.

Dieser Schätzer wird *expected default frequency, (EDF)* genannt.

Zusammenfassung des univariaten KMV Modells zur Berechnung der Default Wahrscheinlichkeit für eine Firma:

- Ermittlung des Aktienwertes $V_{A,i}$ und dessen Volatilität $\sigma_{A,i}$ mit Hilfe der Beobachtungen über Marktwert und Volatilität der Equities ($V_{E,i}$ bzw. $\sigma_{E,i}$) sowie der Schulden K_i als Lösung des Gleichungssystems (4).

- Berechnung der "distance-to-default" DD_i aus (1)

- Berechnung der Default-Wahrscheinlichkeiten p_i mit Hilfe einer empirischen Verteilung, die den Zusammenhang zwischen Default-Wahrscheinlichkeit und "distance-to-default" modelliert (zB. mit Hilfe von EDF)

Das multivariate KMV Modell: Berechnung von multivariaten Default Wahrscheinlichkeiten

Seien $(Wj(t)\colon 0 \le t \le T,)$ unabhängige Standard Brown'sche Bewegungen, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Grundlegendes Modell:

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t) \exp\left\{ \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) (T - t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j} \Big(W_j(T) - W_j(t) \Big) \right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift und $\sigma_{A,i}^2 = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}^2$ ist die Volatilität.

$\sigma_{A,i,j}$ quantifiziert den Einfluss der Brown'schen Bewegung j auf die Entwicklung des Aktienwertes der Firma i.

Sei $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}(W_j(T) - W_j(t))}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$.

$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \sim N(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sigma_{A,i,k}\sigma_{A,j,k}}{\sigma_{A,i}\sigma_{A,j}}$

Dann gilt $V_{A,i}(T) < K_i \iff Y_i < -DD_i$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + \left(\frac{-\sigma_{A,i}^2}{2} + \mu_{A,i} \right)(T - t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T - t}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Firmen zahlungsunfähig werden:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1) &= P(Y_1 < -DD_1, \ldots, Y_k < -DD_k) \\
&= C_{\Sigma}^{Ga}(\phi(-DD_1), \ldots, \phi(-DD_k), 1, \ldots, 1)
\end{aligned}
$$

C_{Σ}^{Ga} ist die Copula einer multivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ.

Häufigkeit der multivariaten Zahlungsunfähigkeit (joint default frequency):

$$JDF_{1,2,\ldots,k} = C_{\Sigma}^{Ga}(EDF_1, EDF_2, \ldots, EDF_k, 1, \ldots, 1)$$

wobei EDF_i die Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit für die Firma i, $i = 1, 2, \ldots, k$, ist.

Schätzung der Kovarianzen/Korrelationen $\sigma_{A,i,j}$

Schwierigkeiten:

- n ist typischerweise sehr groß
- wenige historische Daten vorhanden,
- wenn n groß, dann bilden die paarweise geschätzten Korrelationskoeffizienten i.A. keine positiv definite Korrelationsmatrix.

Mögliche Lösung:

Faktormodell für die latenten Variablen in dem der Aktienwert durch eine Reihe von gemeinsamen Faktoren (makro-ökonomische globale, regionale, Sektor-, Länder- und Branchen-spezifische Faktoren) und einem Firmenspezifischen Faktor bestimmt wird:

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T = AZ + BU \text{ wobei}$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_k)^T \sim N_k(0, \Lambda)$ sind k gemeinsame Faktoren

$U = (U_1, \ldots, U_n)^T \sim N_d(0, I)$ sind die Firmenspezifischen Faktoren

Z und U sind unabhängig und

die Konstanten Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B = diag(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Modellparameter.

Es gilt dann $cov(Y) = A\Lambda A^T + D$ wobei $D = diag(b_1^2, \ldots, b_n^2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Credit Metrics

Wurde bei J.P.Morgan entwickelt.

Wird in erster Linie für die Evaluierung von Bond Portfolios verwendet. (Siehe Crouhy et al. (2000), J.P.Morgan Inc. (1997))

Basiert auf ein Bonität-Einstufungssystem
(zB. von *Moody* oder von *Standard and Poor's*).

Berücksichtigt die Veränderungen im PF-Wert aufgrund von Veränderungen in den Bonität-Einstufungen.

Sei P ein Portfolio von n Krediten mit einer fixen Laufzeit (zB. 1 Jahr). Sei S_i der Zustand-Indikator von Kreditnehmer i.

Die möglichen Zustände werden mit $0, 1, \ldots, m$ bezeichnet, wobei $S_i = 0$ der Zahlungsunfähigkeit entspricht.

Beispiel 1 *Einstufungssystem von Standard and Poor's*

$m = 7$; *$S_i = 0$ heißt Zahlungsunfähigkeit; $S_i = 1$ oder CCC; $S_i = 2$ oder B; $S_i = 3$ oder BB; $S_i = 4$ oder BBB; $S_i = 5$ oder A; $S_i = 6$ oder AA; $S_i = 7$ oder AAA.*

Für jeden Kreditnehmer wird die Dynamik der Bonität-Einstufungen mit Hilfe einer Markov Kette mit Zustandsmenge $\{0, 1, \ldots, m\}$ und Übergangsmatrix P modelliert.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von historischen Daten geschätzt, zB.:

Ursprüngliche	Einstufung am Ende des Jahres							Zahlungs-
Einstufung	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	unfähigkeit
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Recovery Rates

Im Fall einer Zahlungsunfähigkeit hängt die recovery rate von der Einstufung des Kreditnehmers ab. Der Durchschnittswert und die Standardabweichung der recovery rate werden aufgrund von historischen Daten innerhalb jeder Einstufungsklasse geschätzt.

Evaluierung der Bonds im Falle einer Neu-Einstufung

Beispiel 2 *Betrachten wir ein BBB Bond mit Laufzeit* 5 *Jahre.*

Er zahlt jedes Jahr ein Kupon von 6%.

Die forward Zinsstrukturkurven (forward yield curves) für jede Einstufungsklasse sind wie folgt gegeben (in %):

Einstufung	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.73	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Für ein Nennwert von 100 *zahlt der Bond* 6 *Währungseinheiten am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres. Am Ende des 5. Jahres zahlt der Bond* 106 *Währungseinheiten.*

Annahme: Am Ende des ersten Jahres wird der Bond neu als A Bond eingestuft. Wert des Bonds am Ende des ersten Jahres:
$V = 6 + \frac{6}{1+3{,}73\%} + \frac{6}{(1+4{,}32\%)^2} + \frac{6}{(1+4{,}93\%)^3} + \frac{106}{(1+5{,}32\%)^4} = 108.64$

Analog wird der Wert des Bonds am Ende des 1. Jahres ermittelt, falls er zu diesem Zeitpunkt zu anderen Klassen eingestuft wird.

Es wird eine recovery rate von 51.13% im Falle von Zahlungsunfähigekt angenommen.

Einstufung am Ende des 1. Jahres	Wert
AAA	109.35
AA	109.17
A	108.64
BBB	107.53
BB	102.01
B	98.09
CCC	83.63
Zahlungsunfähigkeit	51.13

Wert und Risiko eines Bond-Portfolios in `Credit Metrics`

Die Abhängigkeit der Neueinstufungen unterschiedlicher Bonds und die Wahrscheinlichkeiten von Neueinstufungen von Gruppen von Bonds werden mit Hilfe der dazugehörigen Rendite berechnet.

Die Rendite von Bond i wird als Normalverteilung Y_i modelliert.

Seien d_{Def}, d_{CCC}, ..., $d_{AAA} = +\infty$ Schwellwerte, sodass für ein Kreditnehmer die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einer neuen Stufe S_i am Ende einer vordefinierten Periode folgendermaßen gegeben sind: $P(S_i = 0) = \phi(d_{Def})$, $P(S_i = CCC) = \phi(d_{CCC}) - \phi(d_{Def})$, ..., $P(S_i = AAA) = 1 - \phi(AA)$.

Die Rendite mehrerer Bonds werden mit Hilfe der multivariaten Normalverteilung modelliert.

Die Korrelationsmatrix dieser Verteilung wird in `Credit Metrics` mit Hilfe von Faktormodellen berechnet.

Dann können Gesamtwahrscheinlichkeiten wie

$$P(S_1 = 0, \ldots, S_n = 3) = P(Y_1 \leq d_{Def}, \ldots, d_B < Y_n \leq d_{BB})$$

berechnet werden. Als Modell für die Abhängigkeitsstruktur des Vektors $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ wird die Gauss'sche Copula(!) verwendet.

Die Risikomasse eines Kreditportfolios werden mit Hilfe von Simulationen berechnet. Es werden viele Szenarien generiert, aufgrund derer der empirische VaR ermittelt wird.

Die Bernoulli Mixture Verteilung

Der 0-1 Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine Bernoulli Mixture Verteilung (BMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = 1|Z) = f_i(Z) \ , \ P(X_i = 0) = 1 - f_i(Z)$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \{0,1\}^n$ gilt

$$P(X = x|Z) = \prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i} (1 - f_i(Z))^{1-x_i}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i} (1 - f_i(Z))^{1-x_i} \Big)$$

Annahme: alle Funktionen f_i sind identisch, $f_i = f$. Für die Anzahl der Zahlungsunfähigkeitsfällen $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt $N|Z \sim$ Binomial$(n, f(Z))$.

Die Poisson Mixture Verteilung

Der diskrete Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine Poisson Mixture Verteilung (PMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $\lambda_i \colon \mathbb{R}^m \to (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Poisson verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = x_i | Z) = \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)} \text{ für } x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt

$$P(X = x | Z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x | Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)} \Big)$$

Annahme: $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)^T$ ist PMV mit Faktoren Z.

Sei $X_i = I_{[1,\infty)}(\tilde{X}_i)$. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist BMV mit $f_i(Z) = 1 - e^{-\lambda_i(Z)}$

Für $\lambda_i(Z)$ klein gilt $\tilde{N} = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \approx \sum_{i=1}^n X_i$.
$\tilde{N} | Z \sim Poisson(\bar{\lambda}(Z))$ wobei $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z)$.

Beispiele von Bernoulli Mixture Modellen

Annahmen:

- Z ist univariat (d.h. es gibt einen Risikofaktor)
- $f_i = f$ für alle i

Es gilt: $P(X_i = 1|Z) = f(Z)$, $\forall i$; $N|Z = \sum_{i=1}^n X_i \sim Binomial(n, f(Z))$.

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Kreditnehmer zahlungsunfähig werden

$$P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) =$$

$$E(P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0|Z)) = E(f(Z)^k(1-f(Z))^{n-k})$$

Sei G die Verteilungsfunktion von Z. Dann gilt:

$$P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1-f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Verteilung der Anzahl N der Zahlungsunfähigen Kreditnehmer :

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1 - f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Beta-mixing Verteilung

Es gilt $Z \sim Beta(a,b)$ und $f(z) = z$.

Die Dichte g von Z: $g(z) = \frac{1}{\beta(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}$, für $a, b > 0$, $z \in (0,1)$ wobei $\beta(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz$ die Euler'sche Betafunktion ist.

Verteilung der Anzahl der zahlungsunfähigen Kreditnehmer:

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 z^k (1-z)^{n-k} g(z) dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 z^{a+k-1}(1-z)^{n-k+b-1} dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)} \qquad \textit{beta-binomial Verteilung}$$

Probit-normal Mixture

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = \phi(\mu + \sigma z)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und ϕ ist die Standard Normalverteilungsfunktion.

Logit-normal Mixture

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = (1 + \exp\{\mu + \sigma z\})^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

CreditRisk$^+$ - Ein Poisson Mixture Modell

(Entwickelt von CSFB in 1997, siehe Crouhy et al. (2000) und `http://www.credit_suisse.com/investment_banking/research/en/credit_risk.jsp`

m unabhängige Risikofaktoren $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, $Z_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sodass $E(Z_j) = 1$.

$\lambda_i(Z) = \bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j$, $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\bar{\lambda}_i > 0$, α_j, β_j sind Konstante. α_j, β_j werden meistens so gewählt, dass $E(\lambda_i(Z)) = \bar{\lambda}_i > 0)$ gilt.

Die Dichte von Z_j ist folgendermassen gegeben: $f_j(z) = \frac{z^{\alpha_j - 1} \exp\{-z/\beta_j\}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}$

Verlust bei Kredit i durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i: $LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$, $1 \leq i \leq n$, wobei λ_i die erwartete deterministische 'Recovery rate' ist und L_i die Höhe von Kredit i ist.

Das Ziel ist, die Verlustverteilung durch eine diskrete Verteilung zu approximieren und für diese die Erzeugende Funktion zu ermitteln.

Sei Y eine diskrete ZV mit Wertebereich $\{y_1, \ldots, y_m\}$ oder eine kontinuierliche ZV mit Dichtefunktion $f(y)$ in $\mathbb{R}$

Definition 1 *Die erzeugende Funktion von Y ist definiert als* $g_Y(t) := E(t^Y) = \sum_{i=1}^{m} t^{y_i} P(Y = y_i)$ *bzw.* $g_Y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} t^y f(y) dy$ *für* $t \in [0, 1]$.

Einige Eigenschaften der erzeugenden Funktionen:

(i) Wenn $Y \sim Bernoulli(p)$ dann $g_Y(t) = 1 + p(t - 1)$.

(ii) Wenn $Y \sim Poisson(\lambda)$, dann $g_Y(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$.

(iii) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$g_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(t).$$

(iv) Sei Y eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und sei $g_{X|Y=y}(t)$ die erzeugenden Funktion von $X|Y = y$. Dann gilt

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{X|Y=y}(t) f(y) dy.$$

(v) Sei $g_X(t)$ die erzeugende Funktion von X. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \text{ wobei } g^{(k)}(t) = \frac{d^k g(t)}{dt^k}.$$

Die Erzeugende Funktion der Verlustverteilung

Jeder Verlust wird als ganzzahliges Vielfaches einer vordefinierten Verlusteinheit L_0 (zB. $L_o = 10^6$ Euro):

$$LGD_i = (1-\lambda_i)L_i \approx \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right] L_0 = v_i L_0 \text{ mit } v_i := \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right]$$

wobei $[x] = \arg\min_t\{t - x \colon t \in \mathbb{Z}, t - x \in (-1/2, 1/2]\}$.

Die Verlustfunktion: $L = \sum_{i=1}^n X_i v_i L_0$.

(a) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $N = X_1 + \ldots + X_n$

$X_i|Z \sim Poisson(\lambda_i(Z))$, $\forall i \Longrightarrow g_{X_i|Z}(t) = \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\}$, $\forall i \Longrightarrow$

$$g_{N|Z}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\} = \exp\{\mu(t-1)\}, \qquad (5)$$

mit $\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z) = \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j)$.

$$\begin{aligned} g_N(t) &= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g_{N|Z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j\right)(t-1)\right\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{(t-1)\sum_{j=1}^m \Bigl(\underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i a_{ij}}_{\mu_j}\Bigr) z_j)\right\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m =$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\{(t-1)\mu_1 z_1\} f_1(z_1) dz_1 \ldots \exp\{(t-1)\mu_m z_m\} f_m(z_m) dz_m =$$

$$\prod_{j=1}^m \int_0^\infty \exp\{z_j \mu_j (t-1)\} \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} z_j^{\alpha_j - 1} \exp\{-z_j/\beta_j\} dz_j \tag{6}$$

Die Berechnung der einzelnen Integrale in (6) ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}} \exp\{z_j \mu_j (t-1)\} z_j^{\alpha_j - 1} \exp\{-z_j/\beta_j\} dz_j = \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$$

$$\delta_j = \beta_j \mu_j / (1 + \beta_j \mu_j). \tag{7}$$

Es gilt also $g_N(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t} \right)^{\alpha_j}$.

(b) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $L = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i L_0$.

Bedingter Verlust aufgrund Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i:

$L_i|Z = v_i(X_i|Z)$; $L_i|Z$ unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$g_{L_i|Z}(t) = E(t^{L_i}|Z) = E(t^{v_i X_i}|Z) = g_{X_i|Z}(t^{v_i}).$$

Die erzeugende Funktion des gesamten Verlusts bedingt durch Z:

$$g_{L|Z}(t) = g_{L_1+L_2+\ldots+L_n|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{L_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i|Z}(t^{v_i}) =$$

$$\exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} Z_j \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij}(t^{v_i} - 1) \right) \right\}.$$

Ähnlich wie bei der Berechnung von $g_N(t)$ erhalten wir:

$$g_L(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j \Lambda_j(t)} \right)^{\alpha_j} \text{ wobei } \Lambda_j(t) = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij} t^{v_i}.$$

δ_j und μ_j sind wie in (7) bzw. (5) gegeben.

Beispiel 3 *Kreditportfolio mit $n = 100$ Krediten, Anzahl der Risikofaktoren $m = 1$ oder $m = 5$, $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda} = 0.15$, für $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_j = \alpha = 1$, $\beta_j = \beta = 1$, $a_{i,j} = 1/m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$*

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} g_N^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \frac{d^k g_N}{dt^k}.$$

Für die Berechnung von $P(N = k)$, $k = 0, 1, \ldots, 100$, kann folgende rekursive Formel verwendet werden:

$$g_N^{(k)}(0) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} g_N^{(k-1-l)}(0) \sum_{j=1}^{m} l! \alpha_j \delta_j^{l+1}, \ k > 1$$

Monte Carlo Methoden in Kreditrisiko-Management

P Kreditportfolio bestehend aus m Krediten;
Verlustfunktion $L = \sum_{i=1}^n L_i$; Die Verluste L_i sind unabhängig bedingt durch einen Vektor Z von ökonomischen Einflussfaktoren.

Gesucht:

$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(L)$, $CVaR_\alpha = E(L|L > q_\alpha(L))$, $CVaR_{i,\alpha} = E(L_i|L > q_\alpha(L))$.

Bei Anwendung von Monte Carlo (MC) Simulation tritt das Problem der Simulation von seltenen Ereignissen auf ("rare event simulation")!

ZB. $\alpha = 0,99$. Nur etwas 1% der standard MC Simulationen führt zu einem Verlust L, sodass $L > q_\alpha(L)$.

Standard MC Schätzer:

$$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)} \sum_{i=1}^n L_i I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)$$

wobei L_i der Verlustwert in der i-ten Simulationslauf ist.

$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L)$ ist sehr instabil, d.h. hat eine sehr hohe Varianz, wenn die Anzahl der Simulationen n nicht sehr sehr groß ist.

Grundlagen von "Importance Sampling"

Sei X eine ZV in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit absolut stetiger Verteilungsfunktion und Dichtefunktion f.

Gesucht: $\theta = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$ für eine bekannte Funktion h.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: $h(x) = I_A(x)$.

Berechnung von CVaR: $h(x) = xI_{x>c}(x)$ mit $c = VaR(X)$.

Algorithmus 1 *(Monte Carlo Integration)*

(1) Generiere X_1,X_2,..., X_n unabhängig aus der Dichte f.

(2) Berechne den standard MC Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(MC)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$.

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n^{(MC)} = \theta$.
Im Falle von *seltenen Ereignissen* ($h(x) = I_A(x)$, $P(A) << 1$) ist die Konvergenz sehr langsam.

Sei g eine Wahrscheinlichkeitsdichte, sodass $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Wir definieren das *Likelihood ratio* als: $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) > 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}$

Es gilt:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)g(x)dx = E_g(h(x)r(x)) \tag{8}$$

Algorithmus 2 *(Importance Sampling)*

(1) Generiere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig aus der Dichte g.

(2) Berechne den IS Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)r(X_i)$.

g heißt "Importance Sampling"-Dichte.

Ziel: Auswahl einer "Importance Sampling"-Dichte, sodass die Variance des IS-Schätzers wesentlich kleiner als die Varianz des standard MC Schätzers ist.

$$var_g\left(\widehat{\theta}_n^{(IS)}\right) = (1/n)(E_g(h^2(X)r^2(X)) - \theta^2)$$

$$var\left(\widehat{\theta}_n^{(MC)}\right) = (1/n)(E(h^2(X)) - \theta^2)$$

Theoretisch kann die Varianz des IS-Schätzers auf 0 reduziert werden!

Annahme $h(x) \geq 0, \forall x$.

Für $g^*(x) = f(x)h(x)/E(h(x))$ gilt: $\widehat{\theta}_1^{(IS)} = h(X_1)r(X_1) = E(h(X))$.

Der IS-Schätzer gibt den richtigen Wert nach einer einzigen Simulation!

Sei $h(x) = I_{\{X \geq c\}}(x)$ wobei $c >> E(X)$ (seltenes Ereignis). Es gilt $E(h^2(X)) = P(X \geq c)$ und aus (8) folgt:

$$E_g(h^2(X)r^2(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r^2(x)g(x)dx = E_g(r^2(X); X \geq c) = \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)f(x)dx = E(r(X); X \geq c) \quad (10)$$

Das Ziel ist g so auszuwählen, dass $E_g(h^2(X)r^2(X))$ klein wird, oder sodass $r(x)$ für $x \geq c$ klein und das Ereignis $X \geq c$ unter der Dichte g wahrscheinlicher als unter der Dichte f ist.

Exponential tilting: Bestimmung des IS-Dichte für "light tailed" Variablen

Sei $M_x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Momentum-generierende Funktion von X:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

IS-Dichte: $g_t(x) = \frac{e^{tx} f(x)}{M_X(t)}$

Likelihood Ratio: $r_t(x) = \frac{f(x)}{g_t(x)} = M_X(t) e^{-tx}$.

Sei $\mu_t = E_{g_t}(X) = E(X \exp\{tX\})/M_X(t)$.

Wie kann man ein geeignetes t für ein bestimmtes IS Problem ermitteln?

Z.B. für die Schätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit?
Das Ziel ist t so zu wählen, dass $E(r(X); X \geq c) = E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX})$ klein wird.

$e^{-tx} \leq e^{-tc}$, für $x \geq c$, $t \geq 0 \Rightarrow E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX}) \leq M_X(t) e^{-tc}$.

Wir setzten $t = argmin\{M_X(t) e^{-tc}\colon t \geq 0\}$.

Daraus folgt $t = t(c)$ wobei $t(c)$ die Lösung der Gleichung $\mu_t = c$ ist.

(Eine eindeutige Lösung existiert für alle relevanten Werte von c - ohne Beweis).

Exponential Tilting für die Normalverteilung

Sei $X \sim N(0,1)$ mit Dichtefunktion $\phi(x)$.

$g_t(x) = \frac{e^{tx}\phi(x)}{M_X(t)} = \frac{e^{tx}\phi(x)}{e^{t^2/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\}$ und $\mu_t = \frac{E(X \exp\{tX\})}{M_X(t)} = t$

D.h. unter der Verteilung g_t gilt $X \sim N(t,1)$
Die Gleichung $\mu_t = c$ lautet $t = c$.

IS im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Seien f und g Wahrscheinlichkeitsdichten. Definiere zwei Wahrscheinlichkeitsmasse P und Q:

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x)dx \text{ und } P(A) = \int_{x \in A} f(x)dx$$

Die grundelegende Gleichung der IS (8) lautet dann:

$$\theta = E^P(h(X)) = E^Q(h(X)r(X))$$

Analog: Exponential tilting im Fall von Wahrscheinlichkeitsdichten:

Sei X eine ZV in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sodass $M_X(t) = E^P(\exp\{tX\}) < \infty$, $\forall t$.
Sei $Q_t(A) := E^P\left(\frac{\exp\{tX\}}{M_X(t)}; A\right)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß in $(\Omega, \mathcal{F})$.

Der IS-Algorithmus bleibt gleich:
Simuliere unabhängige Realisierungen von X_i in $(\Omega, \mathcal{F}, Q_t)$ und setze $\widehat{\theta}_n^{(IS)} = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i r_t(X_i)$ wobei $r_t(X) = M_X(t) exp\{-tX\}$.

Anwendung von IS auf Bernoulli Mixture Modelle

(siehe Glasserman und Li (2003))

Sei $L = \sum_{i=1}^{m} e_i Y_i$ die Verlustfunktion eines Kreditportfolios.

Y_i sind die Verlustindikatoren mit Default-Wahrscheinlichkeit $\bar{p}_i$ und $e_i = (1-\lambda_i)L_i$ die positiven deterministischen *Exposures* (λ_i sind recovery rates und L_i sind die Kredithöhen), $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei Z ein Vektor von ökonomischen Einflussfaktoren,
sodass $Y_i|Z$ unabhängig sind und $Y_i|(Z = z) \sim Bernoulli(p_i(z))$.

Ziel: Schätzung von $\theta = P(L \geq c)$ mit Hilfe des IS-Ansatzes, für ein gegebenes c, $c >> E(L)$.

Vereinfachter Fall: Y_i sind unabhängig, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei $\Omega = \{0, 1\}^m$ der Raum der Zustände von Y.

Das Wahrscheinlichleitsmaß P in Ω:

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{p}_i^{y_i}(1-\bar{p}_i)^{1-y_i}, \ \ y \in \{0, 1\}^m.$$

Die Momentum-generierende Funktion von L: $M_L(t) = \prod_{i=1}^{m}(e^{te_i}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_t:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\exp\{te_i y_i\}}{\exp\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i} \bar{p}_i^{y_i}(1-\bar{p}_i)^{1-y_i} \right).$$

Seien $\bar{q}_{t,i}$ neue Default-Wahrscheinlichlichkeiten:

$$\bar{q}_{t,i} := \exp\{te_i\}\bar{p}_i / (\exp\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i).$$

Somit gilt:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{q}_i^{y_i}(1-\bar{q}_i)^{1-y_i}, \; y \in \{0,1\}^m.$$

D.h. nach der exponential tilting sind die Default-Indikatoren unabhängig mit neuen Default-Wahrscheinlichkeiten $\bar{q}_{t,i}$.

$\lim_{t\to\infty} \bar{q}_{t,i} = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} \bar{q}_{t,i} = 0 \Rightarrow$
$E^{Q_t}(L)$ nimmt alle Werte in $(0, \sum_{i=1}^m e_i)$ an für $t \in \mathbb{R}$.

Für IS-Anwendungen wähle t, sodass $\sum_{i=1}^m e_i \bar{q}_{t,i} = c$.

Allgemeiner Fall: Y_i sind unabhängig bedingt durch Z

1. Schritt: Schätzung der bedingten Überschuss-Wahrscheinlichkeit $\theta(z) := P(L \geq c | Z = z)$ für eine gegebene Realisierung z der ökonomischen Faktoren Z, mit Hilfe des im vereinfachten Fall beschriebenen IS-Ansatzes.

Algorithmus 3 *(IS für die bedingte Verlustverteilung)*

(1) *Für ein gegebenes z berechne die bedingtenn Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ (wie im einfachen Unabhägigkeitsfall) und löse folgende Gleichung:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\exp\{te_i\}p_i(z)}{\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)} = c$$

Die Lösung $t = t(c, z)$ gibt den richtigen tilting-Grad.

(2) *Erzeuge n_1 bedingte Realisierungen des Vektors der Default-Indikatoren $(Y_1, \ldots, Y_m)$. Die einzelnen Indikatoren Y_i, werden unabhängig aus $Bernoulli(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, simuliert, wobei*

$$q_i = \frac{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z)}{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)}$$

(3) *Sei $M_L(t, z) := \prod[\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)]$ die bedingte Moment-erzeugende Funktion von L. Seien $L^{(1)}$, $L^{(2)}$,...,$L^{(n_1)}$ die n_1 bedingten Realisierungen von L für die n_1 simulierten Realisierun-*

gen von $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. *Berechne den* IS*-Schätzer für die Tail-Wahrscheinlichkeit der bedingten Verlustverteilung:*

$$\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) = M_L(t(c,z),z)\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} I_{L^{(j)}\geq c}\,\mathrm{exp}\{-t(c,z)\}L^{(j)}.$$

2. Schritt: Schätzung der unbedingten Überschuss Wahrscheinlichkeit $\theta = P(L \geq c)$.

Naive Vorgangsweise: Erzeuge mehrere Realisierungen z der Einflussfaktoren Z und berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ für jede dieser Realisierungen. Der gesuchte Schätzer ist der Durchschnittswert der Schätzer $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ über alle Realisierungen z.
Das ist nicht die beste Lösung, siehe Glasserman und Li (2003).

Bessere Herangehensweise: IS für die Einflussfaktoren.

Annahme: $Z \sim N_p(0, \Sigma)$ (zB. probit-normal Bernoulli mixture)

Die IS-Dichte g ist die Dichte von $N_p(\mu, \Sigma)$ für einen "neuen" Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^p$. Eine gute Wahl von μ sollte zu häufigen Realisierungen z die zu höheren bedingten Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ führen.

Likelihood Ratio:

$$r_\mu(Z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}Z^t\Sigma^{-1}Z\}}{\exp\{-\frac{1}{2}(Z-\mu)^t\Sigma^{-1}(Z-\mu)\}} = \exp\{-\mu'\Sigma^{-1}Z + \frac{1}{2}\mu'\Sigma^{1}\mu\}$$

Algorithmus 4 *(vollständige IS für Bernoulli mixture Modelle mit Gauss'schen Faktoren)*

(1) Erzeuge $z_1, z_2, \ldots, z_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (n ist die Anzahl der Simulationsrunden)

(2) Für jedes z_i berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$ wie in Algorithmus 3.

(3) Berechne den IS-Schätzer für die unbedingte Überschuss-Wahrscheinlichkeit:

$$\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_\mu(z_i) \widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$$

Die Auswahl von μ

μ soll so gewählt werden, dass die Varianz des Schätzers klein ist.

Idee von Glasserman und Li (2003) (Skizze):

$\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) \approx P(L \geq c|Z = z) \Rightarrow$
Suche eine gute IS-Dichte für die Funktion $z \mapsto P(L \geq c|Z = z)$.

Die optimale IS-Dichte g^* ist proportional zu

$$P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\}.$$

Vorschlag: Wähle eine IS-Dichte mit demselben Modus wie die optimale Dichte g^*.

Das führt zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\mu = \text{argnax}_z \left\{ P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\} \right\}.$$

Exakte Lösung ist schwierig weil $P(L \geq c|Z = z)$ ist i.a. nicht in analytischer Form verfügbar.

Siehe Glasserman und Li (2003) für Lösungsansätze.

Operationelles Risiko (OR)

“Operational risk is defined as the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events. This definition includes legal risk but excludes strategic and reputational risk.” - Zitat Basler Ausschuss über Bankenaufsicht (siehe Basel 2004)

Beim OR werden Verluste zB. durch Betrug, IT-Störungen, Naturkatastrophen, Terrorismus, aber nicht Verluste durch falsche Management Entscheidungen (Fusionen, Übernahmen, udgl.) berücksichtigt.

Hauptunterschied zwischen Markt- bzw. Kreditrisiko und operationelles Risiko: OR kann keine positive Auswirkungen für eine Bank haben.

Basel II: Eigenmittel Unterlegung, bankenaufsichtlicher Überwachungsprozess, erweiterte Offenlegung.

Großes Problem sind die fehlenden Daten.

Datenbanken:

- QIS - Quantitaive Impact Studies des Basler Komitees
- Federal Reserve Bank of Boston
- Private Firmen.

Grundlegende Verfahren des OR Managements

- Basisindikator Ansatz - BIA (Basic Indicator Approach)

$$RC^{(t)}_{BI}(OR) = \frac{1}{Z_t}\sum_{i=1}^{3}\alpha \max(GI^{(t-i)},0) \text{ wobei } Z_t = \sum_{i=1}^{3} I_{\{GI^{t-i}>0\}}.$$

  GI^{t-i} - Brutto Einkommen im Jahr $t-i$
  $RC^{(t)}_{BI}(OR)$ - Sicherheitskapital zur Zwecke des OR-Management im Jahr t basierend auf den BIA.

  Basel II Vorschlag: $\alpha = 0,15$.

- Standartisierter Ansatz - SA (Standardized Approach)

$$RC^{(t)}_{SA}(OR) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\max(\sum_{j=1}^{8}\beta_j GI_j^{(t-i)},0)$$

  j - Index des Geschäftsbereiches
  GI_j^{t-i} - Brutto Einkommen im Jahr $t-i$ im Geschäftsbereich j
  $RC^{(t)}_{BI}(OR)$ - Sicherheitskapital zur Zwecke des OR-Management im Jahr t basierend auf den BIA.

j	Geschäftsbereich	β_j (in %)
1	Corporate Finance	18
2	Trading and Sales	18
3	Retail banking	12
4	Commercial banking	15
5	payment and settlement	18
6	agency services	15
7	asset management	12
8	retail brokerage	18

- Quantifizierungsansätze - AMA (Advanced Measurement Approach)

Das Sicherheitskapital wird von der Bankselbst definiert. Das Verfahren unterliegt der Überprüfung bzw. Zustimmung der nationalen Aufsichtsbehörde.

8 Geschäftsbereiche (wie oben), 7 Typen von Verlust-Ereignissen:

1. interner Betrug
2. externer Betrug
3. Beschäftigungsverfahren und Arbeitsplatzsicherheit
4. Kunden-, Produkt- und Geschäftsverfahren
5. Beschädigung der “physical assets”
6. Unterbrechung der geschäftlichen Handlungen und Systemstörungen
7. Abwicklungs-, Lieferungs- und Prozessmanagement

Grundlegendes Schema eines generischen AMA Modells

Datenbank mit folgender Struktur:

$$\left\{X_k^{t-i,b,l}\colon i = 1,2,\dots,T; b = 1,2,\dots,8; l = 1,2,\dots,7; k = 1,2,\dots,N^{t-i,b,l}\right\}$$

$X_k^{t-i,b,l}$ - k-ter Verlust vom Typ l der Geschäftsbranche b im Jahr $t-i$

$N^{t-i,b,l}$ - Anzahl der Verluste vom Typ l in Branche b in Jahr $t-i$

$T \geq 5$ Anzahl der Jahre.

(Es werden Schwellwerte eingeführt (zB. 10.000,- Euro) und Verluste unterhalb des Schwellwertes werden vernachlässigt.)

Verlust im Jahr $t-i$ für die Branche b: $L^{t-i,b} = \sum_{l=1}^{7} \sum_{k=1}^{N^{t-i,b,l}} X_k^{t-i,b,l}$

Gesamtverlust im Jahr $t-i$: $L^{t-i} = \sum_{b=1}^{8} L^{t-i,b}$.

Ziel: Verwendung der Verlust-Daten um die Verteilung der jährlichen Verluste L^t zu schätzen und die dazugehörigen Risikomaße, zB. VaR, CVaR, zu berechnen.

Sicherheitskapital: $RC^t_{AM}(OR) = \rho_\alpha(L^t)$

wobei ρ_α das Risikomaß zum Konfidenzniveau α ist
($\alpha \in (0.99, 0.999)$).

Bei unbekannter Gesamtverteilung: $RC^t_{AM}(OR) = \displaystyle\sum_{b=1}^{8} \rho_\alpha(L^{t,b})$

Für $\rho_\alpha = VaR_\alpha$ kommts es auch die Evaluierung der Varianz einer ZV der Form $\sum_{i=1}^{N} X_k$ wobei

N ist eine ZV ist, die die Anzahl der Verluste beschreibt, und

X_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ sind ZV, die eine Folge von Verlusten beschreiben.

Operationell-begründete Verluste: Datenproblematik

Es gib keine oder sehr wenige (=kurze) vertrauenswürdige öffentlich zugängliche Daten.

Zitat des Baslers Bankenaufsichtskomitees (Basel 2003):

Despite this progress, inferences based on the data should still be made with caution. ... In addition, the most recent data collection exercise provides data for only one year and, even under the best of circumstances, a one-year collection window will provide an incomplete picture of the full range of potential operational risk events, especially of rare but significant "tail events".

Allgemein akzeptierte Eigenschaften der Verlustgrößen:

- Die Verlustverteilung ist heavy tailed
- Verluste sind zufällige Ereignisse
- Die Frequenz der Verluste variiert stark im Zeitablauf

(Seihe Moscadelli 2004, Federal Reserve System 2005.)

Elemente der Versicherung-Analytik

Definition 2 *Sei $N(t)$ eine diskrete ZV, die die Anzahl der Verluste über einen gegebenen Zeitraum $[0,t]$ angibt. Seien X_1, X_2, ..., die einzelnen Verluste.*
Der Gesamtverlust (oder der aggregierte Verlust) ist $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$.
Die Gesamtverteilungsfunktion $F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x)$.
Für ein fixes t (zB. $t = 1$) wird der Zeit-Index vernachlässigt:
$S_N := S_{N(t)}$, $F_{S_N} := F_{S_{N(t)}}$.

Definition 3 *Seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, i.i.d. mit gemeinsamer Verteilungsfunktion G, $G(0) = 0$. Weiters seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, und N unabhängig. Die ZV S_N heißt in diesem Fall zusammengesetzte Summe. Die ZV N heißt zusammensetzende Variable.*
Notation: $P(N = k) = p_N(k)$.

Verteilungsfunktion der zusammengesetzten Summe:

$$F_{S_N}(x) = P(S_N \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) G^{(k)}(x)$$

wobei
$G^{(k)}(x) = P(S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq x)$ die k-te Faltung von G ist.
Hier gilt $G^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Für die Laplace-Stieltjes Transformation $\widehat{F_{S_N}}$ der zusammengesetzten Summe S_N gilt:

$$\widehat{F_{S_N}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G^{(k)}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G}^k(s) = \mathsf{pgf}_N(\widehat{G}(s))$$

wobei pgf_N die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von N ist.

Beispiel 4 *(Die zusammengesetzte Poisson Verteilung)*
Sei $N \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$. D.h. $p_N(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \ldots, n, \ldots,$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt pgf$_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k = \exp\{-\lambda(1-s)\}$.

Für $s \geq 0$ gilt $\widehat{F_{S_N}}(s) = \exp\{-\lambda(1-\widehat{G}(s))\}$.

Notation $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$.

Wenn die höheren Momente existieren und $\widehat{G}$ und pgf_N differenzierbar sind, dann gilt:

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathsf{pgf}_N(s)\,|_{s=1} = E(N(N-1)\ldots(N-k+1)) \text{ und}$$

$$(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\widehat{G}(s)\,|_{s=0} = E(X_1^k) =: \mu_k$$

Folgerung Beispiel 4: Für $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$ gilt:

$$E(S_n) = (-1)\frac{d\widehat{F}_{S_N}(s)}{ds}|_{s=0} = \exp\{-\lambda[1-\widehat{G}(0)]\}\lambda(-\widehat{G}'(0)) = E(N)E(X_1)$$

Analog: $var(S_N) = \lambda E(X_1^2)$.

Theorem 1 *(Die Momente einer zusammengesetzten Verteilung)*

Für die zusammengesetzte Summe aus Definition 3 mit $E(N) \leq \infty$ und $E(X_1^2) \leq \infty$ gilt:

$E(S_N) = E(N)E(X_1)$ *und* $var(S_N) = var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)$

Die Poisson Verteilung als Modell der Verlustehäufigkeit

N – Anzahl der im Intervall $[0,1]$ eingetreten Verluste.

Annahme 1: In jedem Intervall $[(k-1)/n, k/n]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, gibt es einen Verlust mit Wahrscheinlichkeit p_n.

Annahme 2: Der Eintritt eines Verlustes in einem Intervall ist unabhängig vom Eintritt der Verluste in anderen Intervallen.

Annahme 3: $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.

N_n – Gesamtanzahl der Verluste im Intervall $[0,1]$:
$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} P(N_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, für $k = 0, 1, \ldots,$.

Das heißt $N \approx N_\infty \sim Poi(\lambda)$.

Theorem 2 *(Summe von Zusammengesetzten Poisson ZV)*

Sei $S_{N_i} \sim CPoi(\lambda_i, G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d$. *und* S_{N_i} *sind unabhängig. Dann gilt* $S_N = \sum_{i=1}^d S_{N_i} \sim CPoi(\lambda, G)$ *wobei* $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ *und* $G = \sum_{i=1}^d (\lambda_i/\lambda) G_i$.

Simulation solcher Verluste: Simuliere eine Zahl i aus $\{1, 2, \ldots, d\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$ und dann simuliere aus der Verteilung G_i.

Approximation und Panjer Rekursion

Für gegebene λ und G kann S_N leicht simuliert werden. Wiederholte Simulation führt zu einer empirischen Verteilung, die als Basis für die Approximation der echten Verteilung mit Hilfe einer analytisch gegebenen Verteilung verwendet wird.

Normale Approximation

Sei $S_N \sim Cpoi(\lambda, G)$ sodass $E(N) < \infty$, $G(0) = 0$ und $\int_0^\infty x^2 dG(x) < \infty$.

Durch die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes und unter Anwendung von Satz 1 kann F_{S_N} mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden (siehe Embrechts et al. (1997), Satz 2.5.16):

$$F_{S_N}(x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(N)E(X_1}{\sqrt{var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)}}\right)$$

wobei Φ die standard Normalverteilungsfunktion ist.

Für $S_N \sim Poi(\lambda, G)$ ist die Schiefe folgendermaßen gegeben:

$$v(S_N) = \frac{E[S_N - E(S_N)]^3}{var(S_N)^{3/2}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda E(X_1^2)^3}} > 0$$

Suche eine Approximation mit Hilfe einer rechtsschiefen Verteilung!

Approximation durch eine verschobene Gamma Verteilung

$S_N \approx k + Y$ wobei k ein Translation-Parameter ist und $Y \sim \gamma(\alpha, \beta)$.

k, α und β werden bestimmt in dem der Erwartungswert, die Varianz und die Schiefe von S_N mit den dazugehörigen Statistiken von $k + Y$ gleichgesetzt werden.

Im Falle von $N \sim Poi(\lambda)$ gilt:

$$k + \frac{\alpha}{\beta} = \lambda E(X_1), \ \frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda E(X_1^2), \ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda (E(X_1^2))^3}}$$

Monte Carlo Simulation

Wenn die Daten einer CPoi Verteilung auf einer sehr heavy-tailed Verteilung hindeuten, dann könnte eine Approximation mit der GPD Verteilung im Bereich der höheren Quantilen bessere Ergebnisse liefern.

Siehe Frachot (2004) und Moscadelli (2004)

Die Rekursionen von Panjer

Annahme: X_1 hat eine diskrete Verteilung mit Werten $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $g_k = P(X_1 = k)$. Sei (einfachheitshalber) $g_0 = 0$.

Weiters sei $p_k = p_N(k) = P(N = k)$, $s_k = P(S_N = k)$ und $g_k^{(n)} = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k)$.

Es gilt $g_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} g_i^{(n)} g_{k-i}$ für $k \geq 2$ und $n \geq 1$.

Daraus folgt:

$$s_0 = P(S_N = 0) = P(N = 0) = p_0$$

$$s_n = P(S_N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_n^{(k)} \text{ für } \ n \geq 1$$

Definition 4 *(Panjer'sche Klasse)*

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (p_k) von N gehört zur Panjer'schen Klasse Panjer(a,b) für $a, b \in \mathbb{R}$ wenn $p_r = (a + (b/r))p_{r-1}$ für $r \geq 1$.

Beispiele: $B(n,p)$, $Poi(\lambda)$, $NB(\alpha,p)$.

Abgesehen von degenerierten Wahrscheinlichkeitsmaßen sind diese die einzigen diskreten Verteilungen, die einer Panjer'schen Klasse gehören, siehe Kotz (1969), Sundt und Jewell (1982).

Theorem 3 *(Panjer'sche Rekursion)*

Wenn N *der Panjer'schen Klasse* $Panjer(a,b)$ *gehört und* $g_0 = P(X_1 = 0) = 0$*, dann gilt*

$$s_r = \begin{cases} p_0 & r = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} (a + (bi/r)) g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Falls $g_0 = P(X_1 = 0) > 0$ *gilt*

$$s_r = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_0^{(k)} & r = 0 \\ (1 - a g_0)^{-1} \sum_{i=1}^{r} (a + bi/r) g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Beispiel 5 *Panjer'sche Rekursion für* $CPoi(100, LN(1,1))$
Bild 10.5: Um den 99.9% Quantil ist die Approximation mit Hilfe der Panjer'sche Rekursion ausgezeichnet. Weiter in den Tail nehmen Rundungfehler die Oberhand.

Die gemischte Poisson Verteilung

Für $N \sim Poi(\lambda)$ gilt $E(N) = \lambda = var(N)$. Oft gilt $var(N) > E(N)$ für die Anzahl der Verluste N (*Overdispersion*), was nicht modellierbar mit $N \sim Poi(\lambda)$ ist.

Definition 5 *Eine ZV N mit Verteilungsfunktion*

$$p_N(k) = P(N = k) = \int_0^\infty P(N = k|\Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda).$$

heißt gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ.

Λ könnte zB. eine Gammaverteilung oder eine log-Normalverteilung sein.

Theorem 4 *Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ. Dann gilt $E(N) = E(\Lambda)$ und $var(N) = E(\Lambda) + var(\Lambda)$. D.h. für nicht-degenerierte Λ besitzt N eine Overdispersion.*

Theorem 5 *(Die Negative Binomial (NB) Verteilung als gemischte Poisson Verteilung)*

Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion $\Lambda \sim \gamma(\alpha, \beta)$. Dann hat N eine Negative Binomial Verteilung: $N \sim NB(\alpha, \beta/(\beta + 1))$.

Tail von aggregierten Verlustverteilungen

Theorem 6 *(Reguläre Variation der zusammengesetzten Summen-Verteilungen) Sei die ZV S_N eine zusammengesetzte Summe. Wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\sum_{k=0}^{\infty}(1+\epsilon)^k p_N(k) < \infty$ und $\bar{G}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, wobei $\alpha > 0$ und $L(x)$ eine langsam variierende Funktion ist, dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_{S_n}(x)}{\bar{G}(x)} = \lambda,$$

d.h. F_{S_N} und G haben dasselbe Tail-Verhalten.

Beweis in Embrechts et al. (1997).

Beispiel 6 *Die zusammengestzte Summe S_N für eine gemischte Poisson Verteilung N heißt eine zusammengestezte gemischte Poisson Summe.*

Wenn N eine negative Binomialverteilung $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$, d.h. N ist eine gemischte Poisson Verteilung mit Struktur-Verteilungsfunktion $\gamma(\alpha, \beta)$, dann sind die Bedingungen von Satz (6) erfüllt und S_N besitzt sowie $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$ eine reguläre Variation.

Definition 6 *(stochastischer Prozesse)*

Die Menge der Zufallsvariablen $\{X(t), t \in T\}$ *heißt stochastischer Prozess mit Parameterraum* $T \subseteq \mathbb{R}$ *und Zustandsraum* Z *bestehend aus allen möglichen Realizierungen der Zufallsvariablen* $X(t)$*,* $t \in T$*. Wenn* T *endlich oder abzählbar ist, dann ist* $\{X(t), t \in T\}$ *ein Prozess mit diskreter Zeit, ansonsten ist* $\{X(t), t \in T\}$ *ein Prozess mit stetiger Zeit. Wenn* Z *eine endliche oder abzählbare Menge ist, dann spricht man von einem diskreten, ansonsten von einem stetigen Prozess.*

Jede Realisierung des stoch. Prozesses $\{X(t), t \in T\}$ *ist eine Funktion* $x: T \to Z, t \mapsto x(t)$*. Diese Funktionen heißen Trajektorien des stoch. Prozesses.*

Definition 7 *(Zähl-Prozesse)*

Ein stoch. Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ *mit Zustandraum* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *heißt Zähl-Prozess wenn seine Trajektorien rechts stetige Funktionen sind deren linksseitigen Grenzwerte existieren, und es eine Folge von Zufallsvariablen* $T0 = 0$*,* T_1*,*T_2*, ..., gibt sodass* $P(\lim_{n\to\infty} Tn = \infty) = 1$ *und* $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{T_k \geq t}$*.*

Definition 8 *(homogener Poisson Prozess)*

Ein stoch. Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ heißt homogener Poisson Prozess (HPP) mit Intensität λ wenn er erfolgende Eigenschaften hat:

(i) *N ist ein Zähl-Prozess*

(ii) *$N(0) = 0$, fast sicher*

(iii) *N hat stationäre und unabhängige Zuwächse*

(iv) *für jedes $t > 0$, $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.*

Anmerkung: Die Bedingungen (iii) und (iv) implizieren:

- $N(v) - N(u)$ und $N(t) - N(v)$ unabhängig für alle $0 < u < v < t$.
- $P(N(v) - N(u) = k) = P(N(v - u) = k) = e^{-\lambda(v-u)} \frac{(\lambda(v-u))^k}{k!}$

$N(v) - N(u)$ - Anzahl der Ereignisse (Ansprüche, Verluste) im Intervall $(u, v]$. Durch Stationarität hat sie dieselbe Verteilung wie $N(v - u)$.

Theorem 7 *(Charakterisierung von HPP)*

Sei N ein Zähl-Prozess. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(1) N ist ein HPP mit Intensität λ.

(2) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse und

$$P(N(t)=1)=\lambda t+o(t) \text{ für } t\to 0^+$$

$$P(N(t)\geq 2)=o(t) \text{ für } t\to 0^+$$

(3) Die Zeitintervalle zwischen aufeinander folgenden Ereignissen $(\Delta_k = T_k - T_{k-1})_{k\geq 1}$ sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion $Exp(\lambda)$.

(4) Für alle $t>0$, $N(t)\sim Poi(\lambda t)$ und, unter der Bedingung $N(t)=k$ haben alle Eintritt-Zeiten T_1,T_2, ..., T_k dieselbe Verteilung wie eine sortierte Stichprobe von k unabhängigen in $[0,t]$ gleichverteilten ZV. Die bedingte Dichtefunktion ist folglich folgendemaßen gegeben:

$$f_{T_1,\ldots,T_k|N(t)=k}(t_1,\ldots,t_k)=\frac{k!}{t^k}I_{\{0<t_1<\ldots<t_k<t\}}$$

Beweis: Siehe Mikosch (2004), Resnick (1992).

Multivariate Poisson Prozesse

Siehe Lindskog und McNeil (2003), Pfeifer und Neš̄lehovà (2004), Chaver-Demoulin, Embrechts und Neš̄lehovà (2005).

Verallgemeinerungen des Poisson Prozesses (PP)

Erneuerungsprozesse: Exponentielle Wartezeit-Verteilung wird durch eine allgemeine Verteilung F_Δ ersetzt.

inhomogene PP: die konstante Intensität wird durch eine deterministische Funktion $\lambda(\cdot)$ ersetzt.

gemischte PP: die deterministische Konstante Intensität wird durch eine ZV Λ ersetzt.

doppelt stochastische oder Cox Prozesse: λ wird durch einen stochastischen Prozess $\{\lambda_t : t \geq 0\}$ ersetzt.

"self exiting" oder Hawkes Prozesse: λ wird durch einen stochastischen Prozess ersetzt, der ausschließlich von den Eintritt-Zeiten vergangener Ereignisse abhängt.

Inhomogene Poisson Prozesse

Definition 9 *Ein Zählprozess N ist ein inhomogener Possion Prozess (IPP) wenn es eine deterministische Funktion $\lambda(s) \geq 0$ gibt, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *N(0)=0, fast sicher.*

(ii) *N hat unabhängige Zuwächse*

(iii) *Für alle $t \geq 0$, gilt*

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

Die Funktion $\lambda(\cdot)$ heißt Intensität-Funktion, das Integral $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ heißt Intensitätsmaß (oder kumulierte Intensität-Funktion).

Anmerkung:

Ähnlicher Charakterisierungssatz wie für HPP:
für $0 < s < t$, $N(t) - N(s) \sim Poi(\Lambda(t) - \Lambda(s)$.

Beispiel 7 *(Rekord Verluste)*

Die nichtnegativen ZV X_i, repräsentieren Verluste, sind i.i.d. mit Dichtefunktion $f(x) > 0$ für $x \geq 0$, gegeben.

Sei $N(t) = \sum i = 1^\infty I_{\{X_i \leq t \text{ und } X_i > X_j, j=1,\ldots,i-1\}}$

$N(t)$ heißt der Rekord-Prozess.

Für $h, t > 0$ gilt:

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i \in (t, t+h] \text{ und } X_{i-1} \leq t, \ldots, X_1 \leq t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (F(t+h) - F(t))(F(t))^{i-1} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} h + o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

Für $h, t > 0$ gilt weiters: $P((N(t+h) - N(t) \geq 2) \leq$

$$\sum_{i<j} P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_{i-1} \leq t, X_i \in (t, t+h], X_{i+1} \leq t+h, \ldots, X_{j-1} \leq t+h, X_j \in (t, t+h]\right)$$

$$= \left(\int_t^{t+h} f(s) ds\right)^2 \sum_{i<j} (F(t))^{i-1} (F(t+h))^{j-i-1} = o(h^2) \text{ für } h \to 0^+$$

$N(t)$ ist IPP mit Intensität-Funktion $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$.

IPP $\Rightarrow$ HPP

Theorem 8 *(Veränderung der Zeit, operationelle Zeit)*

Sei N ein IPP mit streng monoton steigender Intensität-Funktion Λ. Sei $\tilde{N}(t) = N(\Lambda^{-1}(t))$. $\tilde{N}$ ist eine HPP mit Intensität 1.

HPP $\Rightarrow$ IPP

Random Sampling:
Sei λ eine Intensität-Funktion, sodass $\lambda(s) \leq c < \infty$ für $s \geq 0$. Starte mit einem HPP mit Intensität c. Seien $T_0 = 0$, T_1, T_2, ... seine Ereignis-Eintritt-Zeiten. Kosntruiere $\tilde{N}$ aus $(T_i)_{i\geq 0}$ in dem die Ereignisse T_i unabhängig mit Wahrsch. $1 - (\lambda(T_i)/c)$ gelöscht werden. $\tilde{N}$ besteht aus den übrig gebliebenen Punkten und ist IPP mit Intensität-Funktion $\lambda(s)$.

Beispiel 8 *(Gemischte Poisson Prozesse)*

Zählprozesse in Kredit-Risikomodelle: T_k *entsprechen den Kredit-Ereignissen wie Zahlunsunfähigkeiten oder Herabstufungen.*

$$P(T_1 \geq t) = P(N(t) = 0)$$

Falls $N(t)$ *HPP mit Intensität* λ*, dann gilt*

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Fall N *gemischter PP mit Struktur-Verteilungsfunktion* F_Λ*, dann gilt:*

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_\Lambda(t) = \widehat{F}_\Lambda(t)$$

Für $\Lambda \sim Ga(\alpha, \beta)$ *(die negative binomial Verteilung) und* $t \geq 0$ *gilt:*

$$P(T_1 > t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \beta^\alpha (t + \beta)^{-\alpha}$$

D.h. $T_1 \sim Pa(\alpha, \beta)$*.*