Was ist Kreditrisiko?

Zitat von McNeil, Frey und Embrechts (2005):

Credit risk is the risk that the value of a portfolio changes due to unexpected changes in the credit quality of issuers or trading partners. This subsumes both losses due to defaults and losses caused by changes in credit quality such as the downgrading of a counterparty in an internal or external rating system

Beispiele Kreditrisiko-behaftete Finanzinstrumente

- Portfolios von Unternehmensanleihen
- OTC ("over the counter") Transaktionen
- Handel im Bereich der Kreditderivate

Kreditrisiko: ein einfaches Modell

P: Portfolio von n risikoreichen Anleihen in der Höhe L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

p_i: Wahrscheinlichkeit, dass Kreditnehmer i zahlungsunfähig wird.

$1 - \lambda_i$: Anteil des Verlustes aus Anleihe i falls Kreditnehmer i zahlungsunfähig wird. $\lambda_i \in [0, 1]$ heißt "recovery rate" von Anleihe i.

Verlust in Falle von Zahlungsunfähigkeit ("loss-given-default"):

$$LGD_i = (1 - \lambda_i)L_i$$

Bernoulli ZV X_i: Status des Kreditnehmers i zum Zeitpunkt T

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist zahlungsunfähig} \\ 0 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist nicht zahlungsunfähig} \end{cases}$$

Es gilt $p_i = P(X_i = 1)$
Gesamtverlust zum Zeitpunkt T:

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot LGD_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (1 - \lambda_i) L_i$$

.

Verteilung von L hängt von der Gesamtverteilung von $(X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ ab.

Das einfachste Modell:

- $L_i = L_1$, $\forall i$
- recovery rates sind deterministisch und $\lambda_i = \lambda_1$, $\forall i$
- X_i sind i.i.d. mit Wahrscheinlichkeit p

Dann gilt $L = LGD_1 \cdot N$ mit $N = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n,p)$.

Modelle mit latenten Variablen

Die Kreditnehmer werden in $m+1$ homogenen Kategorien geteilt; alle Kreditnehmer einer Gruppe haben dieselbe Wahrscheinlichkeit zahlungsunfähig zu werden (*default Wahrscheinlichkeit*).

Historische Beobachtungen der Anzahl der Kreditnehmer einer Kategorie, die Zahlungsunfähig werden $\Longrightarrow$ Schätzung der Default Wahrscheinlichkeit für Kreditnehmer der entsprechenden Kategorie.

Status Variable $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$, $S_i \in \{0, 1, \ldots, m\}$,
$S_i = 0$ entspricht der Zahlungsunfähigkeit
$S_i = j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ entspricht den unterschiedlichen Einteilungskategorien, könnten zB. Rating Klassen sein.

Dann gilt $X_i = \begin{cases} 0 & S_i \neq 0 \\ 1 & S_i = 0 \end{cases}$

$S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)^T$ wird mit Hilfe der latenten Variablen $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ modelliert.

Y_i könnte zB. der Wert der Aktien von Kreditnehmer i.

Seien d_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m+1$ Schwellwerte, sodass $d_{i,0} = -\infty$ und $d_{i,m+1} = \infty$.

Dann gilt: $S_i = j \Longleftrightarrow Y_i \in (d_{i,j}, d_{i,j+1}]$.

Sei F_i die Verteilungsfunktion von Y_i

Default Wahrscheinlichkeit: $p_i = F_i(d_{i,1})$.

Wahrsch., dass die ersten k Kreditnehmer zahlungsunfähig werden:

$$p_{1,2,\ldots,k} = P(Y_1 \leq d_{1,1}, Y_2 \leq d_{2,1}, \ldots, Y_k \leq d_{k,1})$$

$$= C(F_1(d_{1,1}), F_2(d_{2,1}), \ldots, F_k(d_{k,1}), 1, 1, \ldots, 1) = C(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1, \ldots, 1)$$

D.h. die Gesamt-default-Wahrscheinlichkeit hängt wesentlich von der Copula C ab.

Das KMV Modell (siehe auch `www.moodyskmv.com`)

Die Status Variablen $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ können nur zwei Werte 0 und 1 annehmen, d.h. $m = 1$.

Die latenten Variablen $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ hängen mit dem Wert der Aktien der jeweiligen Firmen folgendermaßen zusammen.

Das Modell von Merton

Die Bilanz jeder Firma besteht aus 2 Positionen:
Aktiva (Aktien) und Passiva (Liabilities and Equities).

Die Passiva bestehen aus Schulden ("Liabilities") und Stammkapital ("Equity").

$V_{A,i}(T)$: Wert der Aktien der Firma i zum Zeitpunkt T

$K_i(T) =: K_i$: Wert der Schulden der Firma i zum Zeitpunkt T

$V_{E,i}(T)$: Wert des Stammkapitals der Firma i zum Zeitpunkt T

Annahme: Zukünftiger Wert der Aktien wird als geometrische Brown'sche Bewegung modelliert

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t)\exp\left\{\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_{A,i}\left(W_i(T) - W_i(t)\right)\right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift, $\sigma_{A,i}$ ist die Volatilität und $(W_i(t)\colon 0 \le t \le T)$ ist eine Standard Brown'sche Bewegung (Wiener Prozess).

D.h. $(W_i(T) - W_i(t)) \sim N(0, T-t)$.

Daraus folgt $\ln V_{A,i}(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$
mit $\mu = \ln V_{A,i}(t) + \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)(T-t)$ und $\sigma^2 = \sigma_{A,i}^2(T-t)$.

Weiters gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T))$

Setze $Y_i = \frac{W_i(T)-W_i(t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$.

Dann gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T)) = I_{(-\infty,-DD_i)}(Y_i)$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + (\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2})(T-t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}} \tag{1}$$

DD_i heißt *distance-to-default*.

Berechnung des “distance to default”

Schwierigkeit: $V_{A,i}(t)$ kann nicht beobachtet werden
Aber $V_{E,i}(t)$ kann beobachtet werden.

KMVs Auffassung: Die Geldgeber besitzen die Firma solange die Schulden seitens der Stammkapitalbesitzer (Equity holders) nicht vollständig bezahlt werden

$$\Downarrow$$

$V_{E,i}(T)$ ist daher der Preis einer Call Option über die Aktien der Firma mit Strike Price den Buchwert der Schulden zum Zeitpunkt T:

$$V_{E,i}(T) = \max\{V_{A,i}(T) - K_i, 0\}$$

Aus der Black-Scholes Formula (Optionspreistheorie):

$$V_{E,i}(t) = C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) = V_{A,i}(t)\phi(e_1) - K_i e^{-r(T-t)}\phi(e_2) \qquad (2)$$

wobei

$$e_1 = \frac{\ln(V_{A,i}(t) - \ln K_i + (r + \sigma_{A,i}^2/2)(T-t)}{\sigma_{A,i}(T-t)} \text{ und } e_2 = e_1 - \sigma_{A,i}(T-t)$$

ϕ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung und r ist der risikofreie Zinssatz.

Im KMV Modell gilt weiters:

$$\sigma_{E,i} = g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \tag{3}$$

Beobachtung/Schätzung von $V_{E,i}(t)$ bzw. $\sigma_{E,i}$ aus historischen Beobachtungen

$$\Downarrow$$

Einsetzen in (2) und (3) und Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} V_{E,i}(t) &= C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) \\ \sigma_{E,i} &= g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \end{aligned} \tag{4}$$

um $V_{A,i}(t)$ und $\sigma_{A,i}$ zu ermitteln

$$\Downarrow$$

Verwendung dieser Werte zur Berechnung von DD_i aus (1).

Die erwartete Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit (expected default frequency, EDF)

KMV Modell evaluiert nicht direkt die Default Wahrscheinlichkeit $p_i = P(Y_i < -DD_i)$

Ermittlung von Firmen die historisch gesehen je einen "distance-to-default" von ca. DD_i hatten.

Ermittlung der Häufigkeit von Zahlungsunfähigkeit für diese Firmen als Schätzer für die Default-Wahrscheinlichkeit p_i.

Dieser Schätzer wird *expected default frequency, (EDF)* genannt.

Zusammenfassung des univariaten KMV Modells zur Berechnung der Default Wahrscheinlichkeit für eine Firma:

- Ermittlung des Aktienwertes $V_{A,i}$ und dessen Volatilität $\sigma_{A,i}$ mit Hilfe der Beobachtungen über Marktwert und Volatilität der Equities ($V_{E,i}$ bzw. $\sigma_{E,i}$) sowie der Schulden K_i als Lösung des Gleichungssystems (4).
- Berechnung der "distance-to-default" DD_i aus (1)
- Berechnung der Default-Wahrscheinlichkeiten p_i mit Hilfe einer empirischen Verteilung, die den Zusammenhang zwischen Default-Wahrscheinlichkeit und "distance-to-default" modelliert (zB. mit Hilfe von EDF)

Das multivariate KMV Modell: Berechnung von multivariaten Default Wahrscheinlichkeiten

Seien $(Wj(t)\colon 0 \leq t \leq T,)$ unabhängige Standard Brown'sche Bewegungen, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Grundlegendes Modell:

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t) \exp\left\{ \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) (T - t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j} \Big(W_j(T) - W_j(t) \Big) \right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift und $\sigma_{A,i}^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{A,i,j}^2$ ist die Volatilität.

$\sigma_{A,i,j}$ quantifiziert den Einfluss der Brown'schen Bewegung j auf die Entwicklung des Aktienwertes der Firma i.

Sei $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_{A,i,j}(W_j(T) - W_j(t))}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$.

$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \sim N(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \sigma_{A,i,k}\sigma_{A,j,k}}{\sigma_{A,i}\sigma_{A,j}}$

Dann gilt $V_{A,i}(T) < K_i \Longleftrightarrow Y_i < -DD_i$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + \left(\frac{-\sigma_{A,i}^2}{2} + \mu_{A,i} \right)(T - t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T - t}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Firmen zahlungsunfähig werden:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1) = P(Y_1 < -DD_1, \ldots, Y_k < -DD_k)$$
$$= C_\Sigma^{Ga}(\phi(-DD_1), \ldots, \phi(-DD_k), 1, \ldots, 1)$$

C_Σ^{Ga} ist die Copula einer multivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ.

Häufigkeit der multivariaten Zahlungsunfähigkeit (joint default frequency):

$$JDF_{1,2,\ldots,k} = C_\Sigma^{Ga}(EDF_1, EDF_2, \ldots, EDF_k, 1, \ldots, 1)$$

wobei EDF_i die Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit für die Firma i, $i = 1, 2, \ldots, k$, ist.

Schätzung der Kovarianzen/Korrelationen $\sigma_{A,i,j}$

Schwierigkeiten:

- n ist typischerweise sehr groß
- wenige historische Daten vorhanden,
- wenn n groß, dann bilden die paarweise geschätzten Korrelationskoeffizienten i.A. keine positiv definite Korrelationsmatrix.

Mögliche Lösung:

Faktormodell für die latenten Variablen in dem der Aktienwert durch eine Reihe von gemeinsamen Faktoren (makro-ökonomische globale, regionale, Sektor-, Länder- und Branchen-spezifische Faktoren) und einem Firmenspezifischen Faktor bestimmt wird:

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T = AZ + BU \text{ wobei}$$

$Z = (Z_1, \dots, Z_k)^T \sim N_k(0, \Lambda)$ sind k gemeinsame Faktoren

$U = (U_1, \dots, U_n)^T \sim N_d(0, I)$ sind die Firmenspezifischen Faktoren

Z und U sind unabhängig und

die Konstanten Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B = diag(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Modellparameter.

Es gilt dann $cov(Y) = A\Lambda A^T + D$ wobei $D = diag(b_1^2, \dots, b_n^2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.