Tail Abhängigkeit

Definition 12 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungen* F_1 *und* F_2*. Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von* $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ $(\lambda_L > 0)$ *heißt es,* $(X_1, X_2)^T$ *hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.*

Definition 13 *Sei Copula* C *die Verteilungsfunktion von* $(U_1, U_2, \ldots, U_d)$ *mit* $U_i \sim U[0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, d$. *Die Verteilungsfunktion von* $(1 - U_1, 1 - U_2, \ldots, 1 - U_d)$ *heißt "Survival Copula" von* C *und wird mit* $\widehat{C}$ *bezeichnet.*

Lemma 4 *Sei* X *ein Zufallsvektor mit multivariater Tail-Funktion* $\bar{F}$ $(\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = Prob(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_d > x_d))$ *und Randverteilungsfunktionen* F_i, $i = 1, 2, \ldots, d$. *Sei* $\bar{F}_i = 1 - F_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$. *Es gilt*

$$\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \widehat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \ldots, \bar{F}_d(x_d))$$

Lemma 5 *Für jede Copula* C *gilt*

$$\widehat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)\,,$$

wobei $\widehat{C}$ *die Survival-Copula von* C *ist.*

Theorem 17 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und Copula* C. *Es gilt*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1 - u} \text{ und}$$

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}$$

vorausgesetzt die Limes existieren.

Beispiel 13 *Die Gumbel Familie von Copulas:*

$$C_\theta^{\mathsf{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right), \ \theta \geq 1$$

Es gilt $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$, $\lambda_L = 0$.

Beispiel 14 *Die Clayton Familie von Copulas:*

$$C_\theta^{\mathsf{Cl}}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta}, \ \theta > 0$$

Es gilt $\lambda_U = 0$, $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$.

Elliptische Copulas

Definition 14 *Sei X ein d-dimensionaler Zufallsvektor, seien $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ zwei Konstanten, und sei $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $\phi_{X-\mu} = \psi(t^T \Sigma t)$ gilt, wobei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X-\mu$ ist, dann ist X eine elliptisch verteilter Zufallsvektor mit Parameter μ, Σ, ψ: $X \sim E_d(\mu,\Sigma,\psi)$.*

ψ heißt erzeugende Funktion (oder Generator) von X.

Für $d = 1$ stimmen die elliptischen Verteilungen mit den symmetrischen Verteilungen überein.
Überzeugen Sie sich! Verwenden Sie die stochastische Darstellung einer elliptischen Verteilung.

Theorem 18 *(Stochastische Darstellung)*
Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X ist elliptisch verteilt, $X \sim E_d(\mu,\Sigma,\psi)$ und $rang(\Sigma) = k$, dann und nur dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$, $A^T A = \Sigma$, sowie eine nicht negative Zufallsvariable R und einen k-dimensionalen auf der Einheitskugel $\mathcal{S}^{k-1} = \{z \in \mathbb{R}^k\colon z^z z = 1\}$ gleichverteilten Zufallsvektor U gibt, sodass R und U unabhängig sind und $X \stackrel{d}{=} \mu + RAU$.

Anmerkung: Eine elliptische Verteilung X ist *radial symmetrisch*: $X - \mu \stackrel{d}{=} \mu - X$.

Definition 15 *Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen $F_1, F_2, \ldots, F_d$. Dann wird die eindeutige Copula C von F, $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$, elliptische Copula genannt.*

Beispiel 15 *Gauss'sche Copulas sind elliptische Copulas*
Sei C_R^{Ga} die Copula einer d-dimensionalen standard Normalverteilung mit Korrelationsmatrix R:

$$C_R^{Ga}(u) = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_d)),$$

wobei ϕ_R^d die Gesamtverteilungsfunktion einer d-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor 0 und Korrelationsmatrix R und ϕ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion einer univariaten standard Normalverteilung ist. Da die Normalverteilung eine elliptische Verteilung ist, ist dieGauss'sche Copula C_R^{Ga} eine elliptische Copula.

Im bivariaten Fall gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$.

t-Copula: ein weiteres Beispiel elliptischer Copulas

Definition 16 *Sei* $X \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}} AZ \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$, *wobei* $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $S \sim \chi^2_\alpha$, $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ *mit* $AA^t = \Sigma$ *und* $Z \sim N_k(0, I_k)$, *und* S *und* Z *unabhängig sind. Es heißt,* X *hat eine* d*-dimensionale* t*-Verteilung mit Mittelwert* μ *(für* $\alpha > 1$*) und Kovarianzmatrix* $Cov(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2}\Sigma$ *(für* $\alpha > 2$*).* $Cov(X)$ *existiert nicht für* $\alpha \le 2$.

Definition 17 *Die Copula* $C^t_{\alpha,R}$ *von* X *heißt* t*-Copula. Für die* t*-Copula gilt:*

$$C^t_{\alpha,R}(u) = t^d_{\alpha,R}(t^{-1}_\alpha(u_1), \dots, t^{-1}_\alpha(u_d)).$$

$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $i, j = 1, 2 \dots, d$, *ist die Korrelationsmatrix von* Z,

$t^d_{\alpha,R}$ *ist die Verteilungsfunktion von* $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}}Z$, *wobei* $S \sim \chi^2_\alpha$ *und* $Z \sim N_k(0, I_k)$ *unabhängig sind, und* t_α *sind die Randverteilungen von* $t^d_{\alpha,R}$.

Bivariater Fall ($d = 2$):

$$C^t_{\alpha,R}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\alpha(1-\rho^2)}\right\}^{-(\alpha+2)/2} dx_1 dx_2,$$

für $\rho \in (-1, 1)$. R_{12} ist der lineare Korrelationskoeffizient der dazugehörigen bivariaten t_α-Verteilung für $\alpha > 2$.

Copulas: Weitere Eigenschaften

Definition 18 *(Radiale Symmetrie oder Kugel-Symmetrie)*
Ein Zufallsvektor X (oder eine Verteilungsfunktion) heißt radial symmetrisch (oder kugel-symmetrisch) um den Punkt a wenn $X - a \stackrel{d}{=} a - X$.

Beispiel: Ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \in \mathbb{R}^d$ ist radial-symmetrisch um μ.

Definition 19 *(Radiale Symmetrie von Copulas)*
Eine Copula C heißt radial-symmetrisch wenn

$$(U_1 - 0.5, \ldots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \ldots, 0.5 - U_d) \Longleftrightarrow U \stackrel{d}{=} 1 - U,$$

wobei $(U_1, U_2, \ldots, U_d)$ ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C ist.

Für eine radial symmetrische Copula gilt $C = \widehat{C}$.

Beispiel: Elliptische Copulas sind radial symmetrisch.
Die Gumbel und Clayton Copulas sind es nicht. Überzeugen Sie sich!

Definition 20 *Ein Zufallsvektor X heißt vertauschbar ("exchangeable") wenn $(X_1, \ldots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(d)})$ für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(d))$ von $(1, 2, \ldots, d)$.*

Definition 21 *Eine Copula C heißt vertauschbar wenn sie die Gesamtverteilung eines vertauschbaren Zufallsvektors (mit Gleichverteilungen als Randverteilungen) ist.*

Für eine solche Copula gilt:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) \stackrel{d}{=} C(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \ldots, u_{\pi(d)})$$

für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(d))$ von $(1, 2, \ldots, d)$.

Beispiele von vertauschbaren Copulas: Gumbel, Clayton, Gauss'sche Copula C_P^{Ga}, t-Copula $C_{\nu,P}^t$ für den Fall, dass P eine Equikorrelationsmatrix ist: $R = \rho J_d + (1-\rho) I_d$. $J_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist eine Matrix bestehend aus lauter Einser, und $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist die d-dimensionale Einheitsmatrix.

Für bivariate vertauschbare Copulas gilt:

$$P(U_2 \le u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \le u_2 | U_2 = u_1).$$

Theorem 19 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt:* $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Korollar 2 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula* C_ρ^{Ga}, *wobei* ρ
der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 *und* X_2 *ist. Dann gilt:* $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Theorem 20 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein t-verteilter Zufallsvektor mit* ν *Freiheitsgraden, Mittelwert* 0 *und linearer Korrelationsmatrix* R: $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. *Für* $R_{12} > -1$ *gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 19. Hinweis:

$$X_2|X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.

Korollar 3 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer* t*-copula* $C^t_{\nu,R}$ *mit* ν *Freiheitsgraden und einer Korrelationsmatrix* R*. Dann gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Theorem 21 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen copula* C^{Ga}_ρ*, wobei* ρ *der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen* X_1 *und* X_2 *ist. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin\rho \text{ und } \rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{2}$$

Korollar 4 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer elliptischen copula* $C^E_{\mu,\Sigma,\psi}$*. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{12}, \text{ wobei } R_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$$

Theorem 22 *Sei* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *ein elliptisch verteilter Vektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{ij}, \text{ wobei } R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \text{ für } i, j = 1, 2, \ldots, d$$

Beweise von Satz 21, Satz 22 und Korollar 4: siehe McNeil et al. (2005).

Archimedische Copulas

Nachteile elliptischer Copulas:

- I.A. keine Darstellung in geschloßener Form möglich
- kugel-symmetrisch

Bivariate Archimedische Copulas

Definition 22 *Sei* $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ *stetig, streng monoton fallend, sodass* $\phi(1) = 0$. *Die pseudo-inverse Funktion* $\phi^{[-1]}\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *von* ϕ *wird folgendermassen definiert:*

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \le t \le \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

$\phi^{[-1]}$ ist stetig und monoton fallend in $[0,\infty]$, streng monoton fallend in $[0,\phi(0)]$ und es gilt:

$$\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u \text{ für } u \in [0,1]$$

$$\phi(\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \phi(0) \\ \phi(0) & \phi(0) \le t \le +\infty \end{cases}$$

Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Theorem 23 *Sei* $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ *stetig, streng monoton fallend in* $[0,1]$*, sodass* $\phi(1) = 0$*, und sei* $\phi^{[-1]}$ *die pseudo-inverse Funktion von* ϕ*. Sei* $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, sodass* $C(u_1,u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$*.* C *ist eine Copula dann und nur dann wenn* ϕ *convex ist. Copula dieser Form heißen Archimedische Copulas.* ϕ *heißt Generator von* C*. Falls* $\phi(0) = +\infty$*, dann* $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ *und* $C(u_1,u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$*.*

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 16 *Gumbel Copulas*
Sei $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$*,* $\theta \geq 1$*,* $t \in [0,1]$*.*

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right) \text{ ist die Gumbel}$$

Copula mit Parameter θ*.*

Für $\theta = 1$*:* $C_1^{Gu} = u_1 u_2$*.*
$\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Gu} = M(u_1,u_2) = \min\{u_1,u_2\}$*.*

Die Gumbel Copulas haben eine obere Tail Abhängigkeit.

Beispiel 17 *Clayton Copulas*
Sei $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$*,* $\theta > 0$*.*

$$C_\theta^{Cl}(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta} \text{ ist die Clayton Copula mit Parameter } \theta.$$

$\lim_{\theta\to 0} C_\theta^{Cl} = u_1 u_2$ *und* $\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Cl} = M = \min\{u_1,u_2\}$*.*

Die Clayton Copulas haben eine untere Tail Abhängigkeit

Beispiel 18 $\phi(t) = 1 - t$, $t \in [0,1]$. $\phi^{[-1]}(t) = \max\{1 - t, 0\}$.
$C_\phi(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$.

D.h. die untere Fréchet Schranke ist eine Archimedische Copula.

Theorem 24 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Archimedischen Copula C generiert von ϕ. Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$.*

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 19 *Kendalls Tau für Gumbel und Clayton Copulas*

Gumbel Copulas: $\phi(t) = (\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Clayton Copulas: $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = \frac{\theta}{\theta + 2}$.