(2) Sei X eine ZV mit $X \sim GPD_{\gamma,0,\beta}$ und $0 < \gamma < 1$. Es gilt

$$CVaR_p(X) = q_p + \frac{\beta + \gamma q_p}{1 - \gamma},$$

wobei $q_p := VaR_p(X)$ das p-Quantil von X ist.

(3) Sei X eine ZV mit $X \sim F$. Die Randverteilung $\bar{F}(x)$ wird durch $\bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$ approximiert. Daraus folgt $F \approx \tilde{F}$ mit $\tilde{F} := 1 - \bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$. Für $q_p > u$ ist der CVaR der Approximation $\tilde{F}$ folgendermaßen gegeben:

$$CVaR_p(\tilde{F}) = q_p + \frac{\beta + \gamma(q_p - u)}{1 - \gamma}$$

Multivariate Verteilungen

Zufallsvektoren und Modellierung der Abhängigkeiten

Ziel: Modellierung der Veränderungen der Risikofaktoren $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,d})$

Annahme: $X_{n,i}$ und $X_{n,j}$ sind abhängig aber $X_{n,i}$ und $X_{n\pm k,j}$ sind unabhängig für $k \in \mathbb{N}$ ($k \neq 0$), $1 \leq i, j \leq d$.

Grundlegende Eigenschaften von Zufallsvektoren

Ein d-dimensionaler Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ wird durch die Verteilungsfunktion F spezifiziert

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_d \leq x_d) = P(X \leq x).$$

Die i. Randverteilung F_i von F ist die Verteilungsfunktion von X_i und ist folgendermaßen gegeben:

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty)$$

Die Verteilungsfunktion F ist stetig wenn es eine nicht negative Funktion $f \geq 0$ gibt, sodass

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, u_2, \ldots, u_d) du_1 du_2 \ldots du_d$$

f ist in diesem Fall die Dichte von F.

Die Komponenten von X sind unabhängig dann und nur dann wenn

$$F(x) = \Pi_{i=1}^{d} F_i(x_i)$$

oder, wenn die Dichten f und f_i, $1 \leq i \leq d$, existieren, dann sind die Komp. von X d.u.n.d. unabhängig wenn

$$f(x) = \Pi_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

Ein Zufallsvektor wird durch seine charakteristische Funktion $\phi_X(t)$ eindeutig spezifiziert:

$$\phi_X(t) := E(\exp\{it^T X\}), t \in \mathbb{R}^d$$

Beispiel 1 *Für die multivariate Normalverteilung mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix Σ sind die Dichtefunktion f bzw. die charakteristische Funktion ϕ_X folgendermaßen gegeben ($|\Sigma| = |Det(\Sigma)|$):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_X(t) = \exp\left\{it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t\right\}, t \in \mathbb{R}^d$$

Wenn $E(X_k^2) < \infty$ für alle k, dann ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors folgendermaßen gegeben:

$$Cov(X) = E((X - E(X))(X - E(X))^T)$$

Übung 1 *Zeigen Sie das folgende Gleichungen gelten:*

$$E(BX+b) = BE(X)+b \qquad Cov(BX+b) = BCov(X)B^T$$

Beispiel 2 *(Portfolio Optimierung, Markowitzs Modell)*
Es wird in d (risikoreiche) Assets investiert. Der erwartete Portfolioertrag muss μ_p betragen. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ der Zufallsvektor der Asset-Returns mit $E(X) = \mu$ und $Cov(X) = \Sigma$. Die Gewichte des Minimum-Varianz Portfolios sind als Lösung des folgenden quadratischen Optimierungsproblems gegeben:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & w^T \Sigma w \\ \textit{sodass} \quad & \\ & w^T\mu = \mu_p \\ & \textstyle\sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \end{aligned}$$

(siehe zB. Campbell et al. (1997))

Probleme bei Modellierung der Abhängigkeit zwischen Finanzgrössen mit Hilfe der (multivariaten) Normalverteilung

- Finanzgrößen haben i.a. heavier Tails als die Normalverteilung
- Die Zusammenhänge bei größeren Verlusten sind i.a. stärker als bei "normalen" Werten. Diese Art von Zusammenhängen kann mit der multivariaten Normalverteilung nicht modelliert werden.

Abhängigkeitsmaße
Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen. Es gibt einige skalare Maße für die Abhängigkeit zwischen X_1 und X_2.

Lineare Korrelation
Annahme: $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$. Der Koeffizient der linearen Korrelation $\rho_L(X_1, X_2)$ ist folgendermaßen gegeben:

$$\rho_L(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{var(X_1) var(X_2)}}$$

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängig } \Rightarrow \rho_L(X_1, X_2) = 0$$

$$\rho_L(X_1, X_2) = 0 \text{ impliziert nicht, dass } X_1 \text{ und } X_2 \text{ unabhängig sind}$$

Beispiel 3 *Sei $X_1 \sim N(0,1)$ und $X_2 = X_1^2$. Es gilt $\rho_L(X_1, X_2) = 0$ aber X_1 und X_2 sind klarerweise abhängig.*

Weiters gilt:

$$|\rho_L(X_1, X_2)| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0, \text{ sodass } X_2 \stackrel{d}{=} \alpha + \beta X_1$$
$$\text{und signum}(\beta) = \text{signum}(\rho_L(X_1, X_2))$$

Der lineare Korrelationskoeff. ist eine Invariante unter streng monoton steigende lineare Transformationen, ist jedoch keine Invariante unter streng monoton steigende nicht-lineare Transformationen.

Übung 2 *Seien* X_1 *und* X_2 *zwei Zufallsvariablen. Seien* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$ *und* $\beta_2 > 0$. *Zeigen Sie, dass*

$$\rho_L(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho_L(X_1, X_2).$$

Rang Korrelation

Die Koeffizienten der Rang Korrelation (Spearmans Rho und Kendalls Tau) sind Maße für die Übereinstimmung von bivariaten Zufallsvektoren.

Seien (x_1, x_2) und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Die zwei Punkte heißen *übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ und *nicht übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$.

Seien $(X_1, X_2)^T$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)^T$ zwei unabhängige Zufallsvektoren mit gemeinsamer bivariater Verteilung.

Die Kendall's Tau ρ_τ ist definiert als

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right)$$

Sei $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ ein dritter von (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ unahängiger Zufallsvektor mit derselben Verteilung wie (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Die Spearman's Rho ρ_S ist definiert als

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3\left\{P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) < 0\right)\right\}$$

Einige Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S:

- $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ und $\rho_S(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.

- Wenn X_1 und X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- Sei $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion. Dann gilt:

$$\rho_\tau(T(X_1), T(X_2)) = \rho_\tau(X_1, X_2)$$

$$\rho_S(T(X_1), T(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2)$$

Tail-Abhängigkeit

Definition 1 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2. Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ ($\lambda_L > 0$) heißt es, $(X_1, X_2)^T$ hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.

(Siehe Joe 1997, Schmidt und Stadtmüller 2002)

Übung 3 *Sei $X_1 \sim Exp(\lambda)$ und $X_2 = X_1^2$. Bestimmen Sie $\lambda_U(X_1, X_2)$, $\lambda_L(X_1, X_2)$ und zeigen Sie, dass $(X_1, X_2)^T$ eine obere und eine untere Tail-Abhängigkeit hat. Berechnen Sie auch den linearen Korrelationskoeffizienten $\rho_L(X_1, X_2)$.*