

## POT: Schätzer für den Tail und das Quantil der Exzess-Verteilung

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F \in MDA(H_\gamma)$  für  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

- Wähle eine hohe Schwelle  $u$  (unter Verwendung von geeigneten stat. Verfahren) und berechne

$$N_u = \# \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : X_i > u\}$$

- Sei  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u}$  eine Stichprobe von Exzess-Beobachtungen. Bestimme  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\gamma}$ , sodass folgendes gilt:

$$\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\hat{\gamma}, 0, \hat{\beta}(u)}(y),$$

wobei  $\bar{F}_u(y) = P(X - u > y | X > u)$

- Kombiniere die obigen zwei Schritte um folgende Schätzer zu berechnen:

$$\widehat{\bar{F}}(u + y) = \frac{N_u}{n} \left( 1 + \hat{\gamma} \frac{y}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\gamma}} \quad (1)$$

$$\hat{q}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}} \left( \left( \frac{n}{N_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right) \quad (2)$$

## Wie wird eine hohe Schwelle $u$ (POT Methode) gewählt?

- $u$  zu groß: Wenige Beobachtungen für die Schätzung von  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\gamma}$ .
- $u$  zu klein: die Approximation  $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\hat{\gamma}, \hat{\beta}(u)}(u)$  ist nicht gut genug.

Grundidee: Inspektion des Plots der empirischen durchschnittlichen Exzess-Funktion und Auswahl einer Schwelle  $u_0$ , sodass die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion für  $u > u_0$  annähernd linear ist.

Begründung: die Durchschnittliche Exzess-Funktion der  $GPD_{\gamma,0,\beta}$  ist linear!

## Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion

Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d ZV.

Sei  $N_u = \#\{i: 1 \leq i \leq n, X_i > u\}$  die Anzahl der Überschreitung von  $u$  durch  $X_i$

Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion  $e_n(u)$ :

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^n (X_i - u) I\{X_i > u\}$$

Der Plot der durchschnittlichen Exzess-Funktion:  $(X_{k,n}, e_n(X_{k,n}))$  für  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Wenn dieser Plot annähernd linear mit einem positiven Gradienten ist, so wird angenommen, dass die Verteilung einen heavy-tailed Pareto-ähnlichen Tail hat.

### Schätzung der Parameter $\gamma$ und $\beta$

Sei  $u$  eine gegebene Schwelle und  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u}$  Beobachtungen der Überschüsse  $X_i > u$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Die Log-Likelihood Funktion:

$$\ln L(\gamma, \beta, Y_1, \dots, Y_{N_u}) = -N_u \ln \beta - \left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left( 1 + \frac{\gamma}{\beta} Y_i \right)$$

wobei  $Y_i \geq 0$  für  $\gamma > 0$  und  $0 \leq Y_i \leq -\beta/\gamma$  für  $\gamma < 0$ .

$L(\gamma, \beta, Y_1, \dots, Y_{N_u})$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\gamma,0,\beta}(y)$  unter der Bedingung, dass die Beobachtungen der Überschüsse  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u}$  sind.

Für die Ermittlung der Likelihood Funktion siehe Daley, Veve-Jones (2003) and Coles (2001).

Als Schätzer  $\hat{\gamma}$  und  $\hat{\beta}$  werden jene Werte von  $\gamma$  bzw.  $\beta$  verwendet, die die log-Likelihood Funktion maximieren (ML-Schätzer)

Die Methode funktioniert gut für  $\gamma > -1/2$ .

Die ML-Schätzer sind in diesem Fall normal verteilt:

$$(\hat{\gamma} - \gamma, \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1) \sim N(0, \Sigma^{-1}/N_u) \text{ wobei } \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um die Unsicherheit über die einigermaßen willkürliche Auswahl von  $u$  zu reduzieren, überprüft man wie die ML-Schätzer in Abhängigkeit von  $u$  variieren.

Weiters wird der Schätzer

$$\bar{F}(\widehat{u + y}) = \frac{N_u}{n} \left( 1 + \hat{\gamma} \frac{y}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\gamma}}$$

grafisch dargestellt und inspiziert.

## Berechnung von Risikomaßen VaR und CVaR mit Hilfe der POT Methode

Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  Beobachtungen von i.i.d. ZVen mit unbekannter Verteilungsfunktion  $F$ . Direkt aus der POT Methode erhält man folgende Schätzer für die Randverteilung und das Quantil  $q_p = VaR_p(F)$  von  $F$

$$\widehat{F}(u + y) = \frac{N_u}{n} \left( 1 + \hat{\gamma} \frac{y}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\gamma}}$$
$$\hat{q}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}} \left( \left( \frac{n}{N_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right)$$

Für  $0 < \hat{\gamma} < 1$ , zeigen wir, dass  $\widehat{CVaR}_p(F) = \hat{q}_p + \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}(\hat{q}_p - u)}{1 - \hat{\gamma}}$  ein Schätzer von  $CVaR_p(F)$  ist.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der folgenden 3 Schritte:

- (1) Sei  $Z_1 \sim F$  eine ZV mit Verteilungsfunktion  $F$  und seien  $u \geq u_0 > 0$  zwei Schwellwerte. Es gilt  $e_{Z_1}(u) = e_{Z_2}(u - u_0)$  wobei  $Z_2 \stackrel{d}{=} (Z_1 - u_0) | (Z_1 > u_0)$  und  $e_{Z_1}$  und  $e_{Z_2}$  die durchschnittlichen Exzessfunktionen von  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  sind.