Definition 14 *Die ZV.* Z *und* $\tilde{Z}$ *sind vom selben Typus wenn es* $\sigma > 0$ *und* $\mu \in \mathbb{R}$ *existieren, sodass* $\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z - \mu)/\sigma$*, d.h.* $\tilde{F}(x) = F(\mu + \sigma x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$*, wobei* F *und* $\tilde{F}$ *die Verteilungsfunktionen von* Z *bzw.* $\tilde{Z}$ *sind.*

Theorem 5 *(Convergence to types theorem)*
Seien Z, $\tilde{Z}$, Y_n, $n \geq 1$, *ZV. Weder* Z *noch* $\tilde{Z}$ *sind fast sicher konstant. Seien* $a_n, \tilde{a}_n, b_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *Zahlenfolgen mit* $a_n, \tilde{a}_n > 0$.

(i) Wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(Y_n - b_n) = Z \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(Y_n - \tilde{b}_n) = \tilde{Z} \tag{5}$$

dann existieren $A > 0$ *und* $B \in \mathbb{R}$, *sodass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = A \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = B \tag{6}$$

und

$$\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z - B)/A. \tag{7}$$

(ii) Angenommen (6) gilt. Dann impliziert jede der zwei Relationen in (5) die Andere, und (7) gilt auch.

Beweis: Siehe Resnick 1987,Prop. 0.2, Seite 7.

Übung 5 *Überzeugen Sie Sich mit Hilfe des "convergence to type" Satzes, dass H und $\tilde{H}$ vom selben Typus sind, wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$ *und* $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(M_n - \tilde{b}_n) = \tilde{H}$.

Definition 15 *Eine nicht degenerierte ZV X heißt max-stabil wenn für jedes $n \geq 2$* $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ *für unabhängige Kopien X_1,X_2, ...,X_n von X und geeignete Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$.*

Theorem 6 *Die Klasse von max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der möglichen nicht degenerierten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Zufallsvariablen überein.*

Beweis in McNeil, Frey und Embrechts, 2005.

Theorem 7 *(Fischer-Tippet Theorem)*
Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV. Wenn die Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, und eine nicht degenerierte Verteilung H existieren, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$, *dann ist H vom selben Typus wie eine der untenstehenden drei Verteilungen:*

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Fréchet} & \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\
\textit{Weibull} & \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\
\textit{Gumbel} & \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} & x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Beweis: Resnick 1987, Seite 9-11.

Die Verteilungen Φ_α, Ψ_α und Λ heißen *standard Extremwertverteilungen*. Verteilungen, die vom selben Typus wie Φ_α, Ψ_α oder Λ heißen *Extremwertverteilungen*.

Definition 16 *Die ZV X (oder die dazugehörige Verteilung) gehört zum maximalen Anziehungsgebiet der Extremwertverteilung H wenn die Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$.
Notation: $X \in MDA(H)$ ($F \in MDA(H)$).

Theorem 8 *(Charakterisierung von MDA)*
$F \in MDA(H)$ mit normierenden Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ dann und nur dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für $H(x) = 0$ wird $-\ln H(x)$ durch ∞ ersetzt.

Hinweis zum Beweis: Satz 8 folgt vom Satz 4.

Es gibt auch Verteilungen die zu keinem maximalen Anziehungsgebiet einer Extremwertverteilung gehören!

Beispiel 18 *(Die Poisson Verteilung)*
Sei $X \sim P(\lambda)$. D.h. $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es keine Extremwertverteilung Z gibt für die $X \in MDA(Z)$.

Beispiel 19 *(Maxima der Exponentialverteilung)*
Sei (X_k) *eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion* F, $F(x) = 1 - e^{-x}$ *für* $x \geq 0$. *Zeigen Sie, dass* $F \in MDA(\Lambda)$ *mit normierenden Konstanten* $a_n = 1$ *und* $b_n = \ln n$.

Beispiel 20 *(Maxima der Cauchy-Verteilung)*
Sei (X_k) *eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion* F *und Dichtefunktion* f, $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie, dass* $F \in MDA(\Phi_1)$ *mit normierenden Konstanten* $a_n = n/\pi$ *und* $b_n = 0$.

Definition 17 *(Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung)*
Die Verteilungsfunktion H_γ *sei folgendermaßen gegeben:*

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\} & \text{wenn } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{cases}$$

wobei $1 + \gamma x > 0$. *D.h. der Definitionsbereich von* H_γ *wird folgendermaßen gegeben:*

$$\begin{array}{ll} x > -\gamma^{-1} & \text{wenn } \gamma > 0 \\ x < -\gamma^{-1} & \text{wenn } \gamma < 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{array}$$

H_γ *heißt verallgemeinerte standard Extremwertverteilung.*

Theorem 9 *(Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$)*

- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma > 0 \Longleftrightarrow F \in MDA(\Phi_\alpha)$ *mit* $\alpha = 1/\gamma > 0$.

- $F \in MDA(H_0) \Longleftrightarrow F \in MDA(\Lambda)$.

- $F \in MDA(H_\gamma)$ *mit* $\gamma < 0 \Longleftrightarrow F \in MDA(\Psi_\alpha)$ *mit* $\alpha = -1/\gamma > 0$.

Theorem 10 *($MDA(\Phi_\alpha)$, Gnedenko 1943)*

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ $(\alpha > 0) \Longleftrightarrow \bar{F} \in RV_{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$.
Wenn $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, *dann* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} M_n = \Phi_\alpha$ *mit* $a_n = F^{\leftarrow}(1-n^{-1})$.

Beispiel 21 *Zeigen Sie, dass die untenstehenden Verteilungen dem $MDA(\Phi_\alpha)$ gehören und bestimmen Sie die normierenden Konstanten.*

- *Pareto:* $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x > 1$, $\alpha > 0$.

- *Cauchy:* $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- *Student:* $f(x) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma(\alpha/2)(1+x^2/\alpha)^{(\alpha+1)/2}}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

- *Loggamma:* $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$, $x > 1$, $\alpha, \beta > 0$.

Theorem 11 *($MDA(\Psi_\alpha)$, Gnedenko 1943)*

$F \in MDA(\Psi_\alpha)$ *($\alpha > 0$)* $\Longleftrightarrow x_F := \sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) < 1\} < \infty$ *und* $\bar{F}(x_F - x^{-1}) \in RV_{-\alpha}$ *($\alpha > 0$).*

Wenn $F \in MDA(\Psi_\alpha)$, *dann* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - x_F) = \Psi_\alpha$ *mit* $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$.

Beispiel 22 *Sei* $X \sim U(0,1)$. *Es gilt* $X \in MDA(\Psi_1)$ *mit* $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 12 *($MDA(\Lambda)$)*

Sei F *eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt* $x_F \leq \infty$. $F \in MDA(\Lambda)$ *dann und nur dann wenn es ein* $z < x_F$ *existiert, sodass für* F *folgende Darstellung gilt:*

$$\bar{F}(x) = c(x) exp\Big\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \Big\}, \forall x, z < x \leq x_F.$$

Für die Funktionen $c(x)$ *und* $g(x)$ *gilt* $\lim_{x\uparrow x_F} c(x) = c > 0$ *und* $\lim_{t\uparrow x_F} g(t) = 1$, *und* $a(t)$ *ist eine positive absolut stetige Funktion, sodass* $\lim_{t\uparrow x_F} a'(t) = 0$.

Theorem 13 *($MDA(\Lambda)$, alternative Charakterisierung)*

Eine Verteilungsfunktion F gehört zu $MDA(\Lambda)$ dann und nur dann wenn es eine positive Function $\tilde{a}$ existiert, sodass

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x + u\tilde{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-u}, \forall u \in \mathbb{R}$$

Eine mögliche Wahl für $\tilde{a}$ ist $\tilde{a}(x) = a(x)$

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt$$

Die Funktion $a(x)$ heißt durchschnittliche Überschußfunktion (mean excess function):

$$a(x) = E(X - x | X > x), \forall x \le x_F$$

Einige Verteilungen, die dem $MDA(\Lambda)$ gehören:

- Normal: $F(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Exponential: $f(x) = \lambda^{-1} \exp\{-\lambda x\}$, $x > 0$, $\lambda > 0$.
- Lognormal: $f(x) = (2\pi x^2)^{-1/2} \exp\{-(\ln x)^2/2\}$, $x > 0$.
- Gamma: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\}$, $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$.