

**Beispiel 17** Seien  $X$  und  $Y$  zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (Brand- bzw. Autoversicherung). Sei  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$  für die  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , gilt. Es gelte weiters  $E(Y^k) < \infty$ ,  $\forall k > 0$ . Die Versicherungsgesellschaft möchte  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | X + Y > x)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit eines grossen Verlustes bei der Brandversicherung, berechnen, vorausgesetzt es gibt einen grossen Gesamtverlust der zwei Linien.

## Klassische Extremwerttheorie

Seien  $(X_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ .

Für  $n \geq 1$  definiere  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten  $S_n$  bzw.  $M_n$ ?

Zunächst wird die Grenzverteilung von  $S_n$  untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV  $Z$  gibt es zwei Zahlenfolgen  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n^{-1}(S_n - b_n) \rightarrow Z$  in Verteilung für  $n \rightarrow \infty$ .  
Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = Z$

**Definition 11** Eine ZV  $X$  heisst stabil, wenn für alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$  und die i.i.d. Kopien  $X_1$  und  $X_2$  von  $X$  die Konstanten  $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$  und  $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $c_1 X_1 + c_2 X_2$  und  $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$  idente Verteilungsfunktionen haben.

Notation:  $c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

**Theorem 1** Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.

Beweis zB. in Rényi, 1962.

**Theorem 2** Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung  $X$  ist folgendermaßen gegeben:

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta\text{signum}(t)z(t, \alpha))\}$$

wobei  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ ,  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und

$$z(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

**Definition 12** Der Parameter  $\alpha$  in (4) heißt charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt  $\alpha$ -stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit  $G_\alpha$  bezeichnet.

**Definition 13** Sei  $X$  eine ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ . Angenommen es existieren die Zahlenfolgen  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$ , für eine  $\alpha$ -stabile Verteilung  $G_\alpha$ , dann heißt es “ $F$  gehört dem Anziehungsgebiet von  $G_\alpha$ ”. Notation:  $F \in DA(G_\alpha)$ .

Anmerkung:  $X \sim G_2 \iff \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \iff X \sim N(\gamma, 2c)$

**Übung 4** Zeigen Sie, dass  $F \in DA(G_2) \iff F \in DA(\phi)$ , wobei  $\phi$  die Standard Normalverteilung  $N(0, 1)$  ist.

Hinweis: Dazu kann der “Convergence to types”-Satz angewendet werden (siehe die folgenden Folien).

### Theorem 3 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i) Sei  $\phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt:

$$F \in DA(\phi) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^c} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei  $[-x, x]^c$  das Komplement von  $[-x, x]$  in  $\mathbb{R}$  ist.

(ii) Für  $\alpha \in (0, 2)$  gilt:

$$F \in DA(G_\alpha) \iff F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei  $L$  eine langsam variierende Funktion ist und  $c_1, c_2 \geq 0$ ,  $c_1 + c_2 > 0$ .

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.  
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: Sei  $F \in DA(G_\alpha)$  für  $\alpha \in (0, 2)$ . Es gilt dann  $E(|X|^\delta) < \infty$  für  $\delta < \alpha$  und  $E(|X|^\delta) = \infty$  für  $\delta > \alpha$ .

Beweis: Hausübung!

## Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

$(X_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ .

Für  $n \geq 1$ ,  $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten  $M_n$ ?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n),$$

wobei  $u_n = a_n x + b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### **Theorem 4** (*Poisson Approximation*)

Sei  $\tau \in [0, \infty]$  und eine Zahlenfolge  $u_n \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = \exp\{-\tau\}.$$