

## Ein nicht-parametrisches Bootstrapping Verfahren zu Ermittlung von Konfidenzintervallen der Schätzer

Seien die ZV  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. mit Verteilungsfunktion  $F$  und sei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eine Stichprobe daraus.

Gesucht: Ein Schätzer eines von  $F$  abhängigen Parameters  $\theta$ , z.B.  $\theta = q_\alpha(F)$ , und das dazugehörige Konfidenzintervall.

Sei  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  ein Schätzer von  $\theta$ , zB.  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = x_{[(n-1)\alpha]+1,n}$ , wobei  $x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n}$  die sortierte Stichprobe ist.

Das gesuchte Konfidenzintervall ist ein  $(a, b)$ ,  $a = a(x_1, \dots, x_n)$  u.  $b = b(x_1, \dots, x_n)$ , sodass  $P(a < \theta < b) = p$ , für ein vorgegebenes Konfidenzniveau  $p$ .

Fall I:  $F$  ist bekannt.

Durch Simulation von  $F$  werden  $N$  Stichproben ( $N$  groß)  $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , erzeugt.

Sei  $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Empirische Verteilungsfunktion von  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$F_N^{\hat{\theta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\tilde{\theta}_i, \infty)} \rightarrow F^{\hat{\theta}} \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Das gesuchte Konf.intervall:  $\left( q_{\frac{1-p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}), q_{\frac{1+p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}) \right)$

Fall II: F ist unbekannt.

Empirische Verteilungsfunktion von  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ist:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[x_i, \infty)}(x).$$

$n$  groß  $\implies F_n \approx F$ .

Wir können Stichproben aus  $F_n$  nehmen in dem wir ( $n$ ) Elemente aus  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mit Zurücklegung ziehen.

Angenommen es werden  $N$  solche Stichproben gezogen:  
 $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Berechne  $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$ .

Die empirische Verteilungsfunktion  $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\theta_i^*, \infty)}(x)$

approximiert die Verteilungsfunktion  $F^{\hat{\theta}}$  von  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  für  $N \rightarrow \infty$ .

Konfidenzintervall  $(a, b)$ :  $a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*})$ ,  $b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*})$ .

D.h.  $a = \theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*$ ,  $b = \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^*$ ,

wobei  $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \theta_{N, N}^*$  durch Sortierung von  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$  entsteht.

## Zusammenfassung des nicht-parametrischen Bootstrap Verfahrens zur Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben: Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der i.i.d. ZV.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit Verteilungsfunktion  $F$  und ein Schätzer  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eines unbekannt Parameters  $\theta(F)$ .

Gesucht: Ein Konfidenzintervall  $I_p$  für  $\theta$  mit vorgegebenem Konfidenzniveau  $p$ .

- Bilde  $N$  neue Stichproben  $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , durch Ziehung mit Zurücklegung aus  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .
- Berechne  $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$ .
- $I_p = \left( \theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*, \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^* \right)$ , wobei  $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \theta_{N, N}^*$  durch Sortierung von  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$  entsteht

## Eine approximative Lösung ohne Bootstrap

**Gegeben:** Eine Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  von ZV  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , i.i.d. mit unbekannter kontinuierlicher Verteilungsfunktion  $F$ .

**Gesucht:** Ein Konfidenzintervall  $(a, b)$  für  $q_\alpha(F)$ ,  $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $b = b(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sodass

$$P(a < q_\alpha(F) < b) = p \text{ und } P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1 - p)/2$$

Wir suchen  $i > j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , und das kleinste  $p' > p$ , sodass

$$P(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}) = p' \quad (*) \quad \text{und}$$

$$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 \text{ und } P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 (**),$$

wobei  $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$  durch Sortierung von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entsteht.

Sei  $Y_\alpha = \#\{x_k: x_k > q_\alpha(F)\}$

Es gilt:  $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) = P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j - 1)$

$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) = P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i - 1)$

$Y_\alpha \sim B(n, 1 - \alpha)$ . Berechne  $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$  und  $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$  für unterschiedliche  $i$  und  $j$  solange bis  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i > j$ , gefunden werden, die (\*) und (\*\*) erfüllen.

## Historische Simulation

Seien  $x_{m-n+1}, \dots, x_m$  historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren  $X_{m-n+1}, \dots, X_m$ .

Annahme: Die historischen Verluste sind i.i.d.

Die historischen Verlustwerte  $l_k = l_{[m]}(x_{m-k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , stellen eine Stichprobe der Verlustverteilung dar.

Empirischer VaR:  $\widehat{VaR} = q_\alpha(\widehat{F}_n^L) = l_{[n(1-\alpha)]+1, n}$

Empirischer CVaR:  $\widehat{CVaR} = \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]+1} l_{i, n}}{[n(1-\alpha)]+1}$ ,

wobei  $l_{1, n} \geq l_{2, n} \geq \dots \geq l_{n, n}$  durch die Sortierung von  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , entsteht.

VaR und CVaR des aggregierten Verlustes über mehrere Tage, zB. 10 Tage, kann mit Hilfe der Verlustwerte

$$l_k^{(10)} = l_{[m]} \left( \sum_{j=1}^{10} x_{m-n+10(k-1)+j} \right) \quad k = 1, \dots, [n/10]$$

geschätzt werden.

## Historische simulation - Folgerung

### Vorteile:

- einfache Implementierung
- berücksichtigt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Komponenten des Vektors der Veränderungen der Risikofaktoren  $X_{m-k} = (X_{m-k,1}, \dots, X_{m-k,d})$ .

### Nachteile:

- sehr viele historische Daten notwendig um zuverlässige Schätzer zu bekommen
- Schätzung impliziert, dass der geschätzte Verlust nicht größer als bereits historisch realisierte Verluste sein kann.

## Varianz-Kovarianz Methode

Grundidee: Verwendung der linearisierten Verlustfunktion.

$$L_{m+1}^\Delta = l_m^\Delta(X_{m+1}) = -V \sum_{i=1}^d w_i X_{m+1,i} = -V w^T X_{m+1}$$

wobei  $V := V_m$ ,  $w_i := w_{m,i}$ ,  $w = (w_1, \dots, w_d)^T$ ,  
 $X_{m+1} = (X_{m+1,1}, X_{m+1,2}, \dots, X_{m+1,d})^T$ .

Annahme:  $X_{m+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$

Daraus folgt:  $-V w^T X_{m+1} \sim N(-V w^T \mu, V^2 w^T \Sigma w)$

Seien  $x_{m-n+1}, \dots, x_m$  historische Beobachtung der Veränderungen der Risikofaktoren.

Annahme:  $x_{m-n+1}, \dots, x_m$  sind i.i.d.

Schätzer für  $\mu_i$ :  $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{m-k+1,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$

Schätzer  $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$  für  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{m-k+1,i} - \mu_i)(x_{m-k+1,j} - \mu_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, d$$

Schätzer für VaR:  $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = -V w^T \hat{\mu} + V \sqrt{w^T \hat{\Sigma} w} \phi^{-1}(\alpha)$  (siehe Bsp. (8)).

## **Varianz-Kovarianz Methode - Folgerung**

### **Vorteile:**

- analytische Lösung
- einfache Implementierung
- keine Simulationen notwendig

### **Nachteile:**

- Linearisierung nicht immer adäquat, nur für einen kurzen Zeithorizont gerechtfertigt (siehe Übung (2)).
- Annahme der Normalverteilung könnte zur Unterschätzung des Risikos führen und sollte begründet werden (zB. anhand von historischen Daten).

## Monte-Carlo Verfahren

Historische Beobachtungen der Risikofaktoren und deren Veränderungen



Annahme über ein parametrisches Modell für die Verteilungsfunktion der Veränderung der Risikofaktoren  $X_{m+1}$ ; zB. gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$  und Unabhängigkeit von  $X_{m-n+1}, \dots, X_m$ .



Schätzung der charakteristischen Parameter dieser Verteilungsfunktion.

Nehme  $N$  Stichproben  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$  aus  $F$  ( $N$  muss groß genug sein).

Sei  $l_k = l_{[m]}(\tilde{x}_k)$ ,  $1 \leq k \leq N$

Empirische Verteilungsfunktion der Verlust  $L_{m+1}$ :

$$\hat{F}_N^{L_{m+1}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{[l_k, \infty)}(x).$$

Schätzer für VaR:  $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = q_\alpha(\hat{F}_N^{L_{m+1}}) = l_{[N(1-\alpha)]+1, N}$  wobei  $l_{1, N} \geq l_{2, N} \geq \dots \geq l_{N, N}$ .

## Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Schätzer für CVaR:  $\widehat{CVaR}(L_{m+1}) = \frac{\sum_{k=1}^{[N(1-\alpha)]+1} l_{k,N}}{[N(1-\alpha)]+1}$ .

### Vorteile:

- Sehr flexibel; kann jedes Modell verwendet werden, aus dem simuliert werden kann
- Berücksichtigung von zeitlichen Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen der Risikofaktoren möglich etwa durch Verwendung von Zeitreihen

### Nachteile:

- Rechenintensiv; große Anzahl von Simulationen notwendig um gute Schätzwerte zu bekommen.

## Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

**Beispiel 11** *PF besteht aus ein Stück der Aktie  $S$  mit Preis= $S_t$  zum Zeitpunkt  $t$ . Die Veränderungen der Risikofaktoren*

$$X_{k+1} = \ln(S_{t_{k+1}}) - \ln(S_{t_k}),$$

*sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion  $F_\theta$ , wobei  $\theta$  ein unbekannter Parameter ist.*

*$\theta$  kann mit Hilfe von hist. Daten geschätzt werden (zB. ML Verfahren)  
Sei der heutige Preis  $S_{t_k} = S$*

*Wir zeigen: VaR des PF über  $[t_k, t_{k+1}]$  ist folgendermaßen gegeben:  
 $VaR_\alpha(L_{t_k+1}) = S(1 - \exp\{F_\theta^{\leftarrow}(1 - \alpha)\})$ .*

*Wenn  $F_\theta$  kompliziert, dann kann die analytische Berechnung von CVaR schwierig sein. Alternative: Monte-Carlo Simulation.*

## Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

**Beispiel 12** Sei das PF und die Veränderungen der Risikofaktoren  $X_{k+1}$  wie im obigen Beispiel.

Ein populäres Modell für die log. Rendite einer Aktie: GARCH(1,1)  
(siehe zB. Alexander 2002):

$$X_{k+1} = \sigma_{k+1} Z_{k+1} \quad (1)$$

$$\sigma_{k+1}^2 = a_0 + a_1 X_k^2 + b_1 \sigma_k^2 \quad (2)$$

wobei  $Z_k, k \in \mathbb{N}$ , sind i.i.d. und standard normalverteilt  $a_0, a_1$  und  $b_1$  sind Parameter, die geschätzt werden.

Es ist einfach aus diesem Modell zu simulieren.

Analytische Berechnung der VaR bzw. CVaR für ein Zeitintervall bestehend aus mehreren Perioden sind hingegen schwierig!  
Ausprobieren!

## Extremwerttheorie

### Notation:

- Wir verwenden oft dieselbe Notation für die Verteilung einer ZV und ihre Verteilungsfunktion!
- $f(x) \sim g(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  bedeutet  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$
- $\bar{F} := 1 - F$  (“right Tail” einer univariaten Verteilungsfunktion  $F$ ).

**Bezeichnungskonvention:** Man sagt eine ZV  $X$  hat “fat Tails” oder ist “heavy tailed” (h.t.) wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty \quad \forall \lambda > 0$ .

Auch eine ZV  $X$  für die  $\exists k \in \mathbb{N}$ , sodass  $E(X^k) = \infty$ , wird oft *heavy tailed* genannt.

## Reguläre Variation

**Definition 9** Eine meßbare Funktion  $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  besitzt eine reguläre Variation mit Index  $\rho \in \mathbb{R}$  um  $\infty$  wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho \quad \forall x > 0 \quad (3)$$

Bezeichnung:  $h \in RV_\rho$ .

Wenn  $\rho = 0$ , dann heißt es "h variiert langsam um  $\infty$ ".

Wenn  $h \in RV_\rho$  dann  $h(x)/x^\rho \in RV_0$ .

Falls  $h \in RV_\rho$ , dann  $\exists L \in RV_0$  sodass  $h(x) = L(x)x^\rho$  ( $L(x) = h(x)/x^\rho$ ).

Falls  $\rho < 0$ , dann ist die Konvergenz in (3) gleichmäßig in jedem Intervall  $(b, \infty)$  für  $b > 0$ .

**Beispiel 13** 1. Zeigen Sie, dass für die untenstehenden Funktionen  $L, L \in RV_0$  gilt.

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = c \in (0, \infty)$

(b)  $L(x) = \ln(1 + x)$

(c)  $L(x) = \ln(1 + \ln(1 + x))$

2. Gilt es  $f \in RV_0$  für  $f(x) = 3 + \sin x$ ,  $f(x) = \ln(e + x) + \sin x$ ?

Eine Funktion  $L \in RV_0$  kann unendlich stark variieren um  $\infty$  im Sinne, dass

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0 \text{ and } \limsup_{x \rightarrow \infty} L(x) = \infty$$

Ein Beispiel dafür ist  $L(x) = \exp\{(\ln(1+x))^2 \cos((\ln(1+x))^{1/2})\}$ .

**Beispiel 14** Sei  $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ , für  $x > 1$  und  $\alpha > 0$ . Dann gilt  $\bar{F}(tx)/\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$  für  $t > 0$ . D.h.  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ .

**Beispiel 15** Let  $F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$  für  $x > 0$  und  $\alpha > 0$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/x^{-\alpha} = 1$ . Daraus folgt  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ .

**Definition 10** Sei  $X > 0$  eine ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ . Man sagt  $X$  hat eine reguläre Variation wenn  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  für ein  $\alpha > 0$ .

**Aussage 1** Sei  $X > 0$  eine ZV mit Verteilungsfnk.  $F$ , sodass  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  für ein  $\alpha > 0$ . Es gilt dann  $E(X^\beta) < \infty$  für  $\beta < \alpha$  und  $E(X^\beta) = \infty$  für  $\beta > \alpha$ .

Die Umkehrung gilt nicht!

**Aussage 2** (i) Eine meßbare Funktion  $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  hat eine reguläre Variation um  $+\infty$ , wenn eine Funktion  $g$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(tx)/h(t) = g(x), \quad \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt  $g(x) = x^\rho$  für ein  $\rho \in \mathbb{R}$  und dann  $h \in RV_\rho$ .

(ii) Eine monotone Funktion  $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  hat eine reguläre Variation um  $+\infty$ , wenn eine Folge  $(a_n)$  von positiven Zahlen und eine Funktion  $\xi$  existieren, sodass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nh(a_n x) = \xi(x), \quad \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt  $\xi(x)/\xi(1) = x^\rho$  für ein  $\rho \in \mathbb{R}$  und dann  $h \in RV_\rho$ .

Siehe Resnick 1987 für ein Beweis.

**Beispiel 16** Seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ ,  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  für ein  $\alpha > 0$ . Annahme:  $X_1$  ( $X_2$ ) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie  $A_1$  ( $A_2$ ) an. Es wird weiters angenommen, dass  $A_1$  und  $A_2$  gleich viel kosten. Ein Investor hat 2 Stück der Aktie  $A_1$  gekauft. Die Wahrsch., dass sein Verlust grösser als  $l$  ist, wird durch  $P(2X_1 > l)$  gegeben. Kann der Investor die Verlustwahrsch. verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie  $A_1$  und einem Stück der Aktie  $A_2$  wechselt?