- **Risikomaße basierend auf die Verlustverteilung**

  Sei $F_L := F_{L_{n+1}}$ die Verteilung der Verlust L_{n+1}.

  Die Parameter von $F_{L_{n+1}}$ werden anhand von historischen Daten entweder direkt oder mit Hilfe der Risikofaktoren geschätzt.

  1. **Die Standardabweichung** $std(L) := \sqrt{\sigma^2(F_L)}$

     Wird vor allem in der PF-Theorie verwendet.

     Nachteile:

     – STD existiert nur für Verteilungen mit $E(F_L^2) < \infty$, d.h. nicht ansetzbar bei leptokurtischen ("fat tailed") Verlustverteilungen;

     – Gewinne und Verluste beeinflussen die Standardabweichung gleichermaßen.

     Beispiel 7 $L_1 \sim N(0,2)$, $L_2 \sim t_4$ *(Student Verteilung mit 4 Freiheitsgraden)*

     Es gilt $\sigma^2(L_1) = 2$ *und* $\sigma^2(L_2) = \frac{m}{m-2} = 2$

     Die Verlustwarsch. ist jedoch viel größer bei L_2 *als bei* L_1*.*

     Plote den logarithmischen Quotient $\ln[P(L_2 > x)/P(L_1 > x)]$*!*

2. **Value at Risk** $(VaR_\alpha(L))$

Definition 5 *Sei L eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0,1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau.*

$VaR_\alpha(L)$ ist die kleinste Zahl l, sodass $P(L > l) \leq 1 - \alpha$ gilt.

$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R}\colon P(L > l) \leq 1 - \alpha\} =$
$\inf\{l \in \mathbb{R}\colon 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}\colon F_L(l) \geq \alpha\}$

zB. Vorschlag von BIS (Bank of International Settlements): $VaR_{0.99}(L)$ über ein Horizont von 10 Tagen soll als Maß für das Marktrisiko eines PF verwendet werden.

Definition 6 *Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion (d.h. $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$). Die Funktion*

$$F^{\leftarrow}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \geq y\}$$

heißt verallgemeinerte inverse Funktion von F.

Hier gilt $\inf \emptyset = -\infty$.

Falls F streng monoton steigend, dann gilt $F^{-1} = F^{\leftarrow}$.

Übung 1 *Sei $F\colon [0, +\infty) \to [0,1]$ mit* $F(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$

$F^{\leftarrow} =?$

Definition 7 *Sei* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine monoton steigende Funktion.* $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \geq \alpha\}$ *heist* α*-Quantil von* F.

Für die Funktion L und seiner Verteilungsfunktion F gilt:

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha).$$

Beispiel 8 *Sei* $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Es gilt $VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$,
wobei Φ *die Verteilungsfunktion einer ZV* $X \sim N(0,1)$ *ist.*

Übung 2 *Portfolio PF besteht aus* 5 *Stück einer Aktie* A. *Der heutige Preis von* A *ist* $S_0 = 100$. *Die täglichen Log-Rendite sind normal verteilt:* $X_1 = \ln\frac{S1}{S_0}$, $X_2 = \ln\frac{S2}{S_1}, \ldots \sim N(0, 0.01)$. *Sei* L_1 *der 1-Tages PF-Verlust von heute auf morgen.*

(a) *Berechnen Sie* $VaR_{0.99}(L_1)$.

(b) *Berechnen Sie* $VaR_{0.99}(L_{100})$ *und* $VaR_{0.99}(L_{100}^{\Delta})$, *wobei* L_{100} *der 100-Tage PF-Verlust über einen Zeithorizont von 100 Tagen ausgehend von heute ist.* L_{100}^{Δ} *ist die Linearisierung des obigen 100-Tage PF-Verlustes.*

Hinweis: Für $Z \sim N(0,1)$ *gilt* $F_Z^{-1}(0.99) \approx 2.3$.

3. **Conditional Value at Risk** ($CVaR_\alpha(L)$) (oder *Expected Shortfall* (ES))

Ein Nachteil von VaR: Gibt keine Auskunft darüber wie groß der Verlust sein könnte falls $L \geq VaR_\alpha(L)$.

Definition 8 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. $CVaR_\alpha(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$.*

$CVaR_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}(L))}{P(L \geq q_\alpha(L))} = \frac{1}{1-\alpha} E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(L)}^{+\infty} l dF_L(l)$

I_A ist die Indikatorfunktion der Menge A: $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Sei F_L die diskrete Verteilungsfunktion einer Verlustverteilung L und α ein vorgegebenes Konfidenzniveau. Der *verallgemeinerte CVaR* wird im diskreten Fall folgendermaßen definiert:

$$GCVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha}\left[E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) + q_\alpha(L)\Big(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha(L))\Big)\right]$$

Lemma 1 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. Es gilt $CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_p(L)dp$.*

Beispiel 9 *(a) Sei $L \sim Exp(\lambda)$. Bestimmen Sie $CVaR_\alpha(L)$.*

(b) Die Verteilungsfunktion F_L der Verlustfunktion L sei folgendermaßen gegeben: $F_L(x) = 1-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}$ für $x \geq 0$ und $\gamma \in (0,1)$. Bestimmen Sie $CVaR_\alpha(L)$.

Beispiel 10 *Sei $L \sim N(0,1)$. Seien ϕ und Φ die Verteilungsdichte bzw. Verteilungsfunktion von L. Es gilt $CVaR_\alpha(L) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$.*

Sei $L' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $CVaR_\alpha(L') = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$ gilt.

Übung 3 *Sei die Verteilungsfunktion von L die Student'schen t-Verteilung mit $\nu > 1$ Freiheitsgraden Die Dichtefunktion von L ist*

$$g_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Zeigen Sie, dass $CVaR_\alpha(L) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\left(\frac{\nu+(t_\nu^{-1}(a))^2}{\nu-1}\right)$, wobei t_ν die Verteilungsfunktion von L ist.

Methoden zur Berechnung von VaR und CVaR

Portfoliowert: $V_m = f(t_m, Z_m)$

Z_m ist der Vektor von Risikofaktoren.

Verlustfunktion: $L_{m+1} = l_{[m]}(X_{m+1})$

X_{m+1} ist der Vektor der Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{m+1} = Z_{m+1} - Z_m$.

Beobachtungen (historische Daten): $Z_{m-n+1}, \ldots, Z_m$.

Wie können diese historischen Daten zur Berechnung von $VaR(L_{m+1})$, $CVaR(L_{m+1})$ verwendet werden?

Das empirische VaR bzw. CVaR

Sei $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine Stichprobe der unabhängigen identischverteilten ZV $X_1, X_2, \dots, X_n$ mit Verteilungsfunktion F
(Notation: Die ZV $X_1, X_2, \dots, X_n$ sind i.i.d.)

Empirische Verteilungsfunktion: $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[x_k,+\infty)}(x)$

Empirisches Quantil: $q_\alpha(F_n) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{\leftarrow}(\alpha)$

Annahme: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dann gilt: $q_\alpha(F_n) = x_{[n(1-\alpha)]+1}$,
wobei $[y] = \sup\{n \in \mathbb{N} \colon n \leq y\}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

$\widehat{q}_\alpha(F) := q_\alpha(F_n)$ ist der empirische Schätzer des Quantils $q_\alpha(F)$.

Lemma 2 *Sei F eine streng monoton steigende Funktion.
Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \widehat{q}_\alpha(F) = q_\alpha(F)$, $\forall \alpha \in (0,1)$, d.h. der Schätzer $\widehat{q}_\alpha(F)$ ist konsistent.*

Der empirische Schätzer des CVaR ist

$$\widehat{CVaR}_\alpha(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[n(1-\alpha)]+1} x_k}{[(n(1-\alpha)]+1}$$