Theorem 15 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen* F_1, F_2 *und einer nicht spezifizierten Abhängigkeitsstruktur. Sei* $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$. *Dann gilt:*

1. *Die Menge der möglichen linearen Korrelationen von* X_1 *und* X_2 *ist ein abgeschlossenes Intervall* $[\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$ *mit* $0 \in (\rho_{L,min}; \rho_{L,max})$.

2. *Die minimale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn* X_1 *und* X_2 *anti-monoton sind. Die maximale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn* X_1 *und* X_2 *co-monoton sind.*

Im Beweis wird die Höffding'sche Gleichung verwendet:

Lemma 3 *(Die Höffding'sche Gleichung)*

Sei $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Gesamtverteilung* F *und Randverteilungen* F_1, F_2. *Wenn* $cov(X_1, X_2) < \infty$ *dann gilt:*

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1 dx_2.$$

Beweis in McNeil et al.,2005.

Beispiel 12 *Sei* $X_1 \sim Lognormal(0,1)$ *und* $X_2 \sim Lognormal(0,\sigma^2)$, $\sigma > 0$. *Bestimmen Sie* $\rho_{L,min}(X_1, X_2)$ *und* $\rho_{L,max}(X_1, X_2)$.

Beispiel 13 *Betrachten Sie zwei ZV* Z_1 *und* Z_2*, die die Verluste zweier Portfolii darstellen. Sei* $Z_1 \sim N(0,1)$, $Z_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(Z_1, Z_2) = 0$.

Geben Sie zwei Zufallsvektoren $(X_1, X_2)^T$ *und* $(Y_1, Y_2)^T$ *mit unterschiedlichen Gesamtverteilungsfunktionen an, die die obigen Annahmen erfüllen, d.h.* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(X_1, X_2) = 0$, $\rho_L(Y_1, Y_2) = 0$.

Bestimmen Sie die Quantile $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha)$ *und* $F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$ *der Gesamtverluste und vergleichen Sie diese miteinander.*

Fazit: Aus den Verlustverteilungen der zwei Teilen eines Portfolios und aus der Korrelation der jeweiligen Verluste lassen sich keine Schlüsse über die Verlustverteilung des Gesamtportfolios ziehen.

Kendall's Tau und Spearman's Rho

Seien $(x, y)^T$ und $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ zwei Beobachtungen von einem Zufallsvektor $(X, Y)^T$. $(x, y)^T$ und $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$ heißen *übereinstimmend* falls $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$ und *nicht übereinstimmend* falls $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$.

Definition 10 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor. Der Kendall's Tau ist für $(X_1, X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0),$$

wobei $(X_1', X_2')^T$ is eine unabhängige Kopie von $(X_1, X_2)^T$.

Äquivalent: $\rho_\tau(X_1, X_2) = E(sign[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2')])$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$: $\rho_\tau(X) = cov(sign(X - X'))$, wobei $X' \in \mathbb{R}^D$ eine unabhängige Kopie von $X \in \mathbb{R}^d$ ist.

Der Kendall's Tau der Stichprobe:

Sei $\{(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T, \ldots, (x_n, y_n)^T\}$ eine Stichprobe von n Beobachtungen des Zufallsvektors $(X, Y)^T$ dessen Randverteilungen stetig sind. Sei c die Anzahl der übereinstimmenden Paare und d die Anzahl der nicht übereinstimmenden Paare aus der Stichprobe.

$$\tilde{\rho}_\tau(X, Y) = \frac{c - d}{c + d} \stackrel{a.s.}{=} \frac{c - d}{n(n-1)/2}$$

Definition 11 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor. Der Spearman's Rho ist für $(X_1, X_2)^T$ folgendermaßen definiert:*

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3(P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') > 0) - P((X_1 - X_1')(X_2 - X_2'') < 0)),$$

wobei $(X_1', X_2')^T$, $(X_1'', X_2'')^T$ unabhängige Kopien von $(X_1, X_2)^T$ sind.

Äquivalent: Seien F_1 und F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$. Es gilt $\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2))$, d.h. der Spearman's Rho ist die lineare Korrelation der eindeutigen Copula von $(X_1, X_2)^T$.

Im d-dimensionalen Fall $X \in \mathbb{R}^d$:
$\rho_S(X) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2), \ldots, F_d(X_d))$ ist die Korrelationsmatrix der eindeutigen Copula von X, wobei F_1,F_2,...,F_d die stetigen Randverteilungen von X sind.

Theorem 16 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und eindeutiger Copula C. Für die Rankkorrelationen $\rho_\tau(X_1, X_2)$ und $\rho_S(X_1, X_2)$ gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3$$

Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S.

- ρ_τ und ρ_S sind symmetrische Abhängigkeitsmaße mit Wertebereich $[-1, 1]$.

- Falls X_1, X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- X_1, X_2 co-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1$. X_1, X_2 anti-monoton dann und nur dann wenn $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = -1$.

- Seien F_1, F_2 die stetigen Randverteilungen von $(X_1, X_2)^T$ und T_1, T_2 zwei streng monotone Funktionen in $[-\infty, \infty]$. Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_\tau(T_1(X_1), T_2(X_2))$ und $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_S(T_1(X_1), T_2(X_2))$.

(Siehe Embrechts et al., 2002).

Tail Abhängigkeit

Definition 12 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungen* F_1 *und* F_2*. Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von* $(X_1, X2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ *(*$\lambda_L > 0$*) heißt es,* $(X_1, X_2)^T$ *hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.*

Definition 13 *Sei Copula C die Verteilungsfunktion von $(U_1, U_2, \ldots, U_d)$ mit $U_i \sim U[0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Die Verteilungsfunktion von $(1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_d)$ heißt "survival" colupa von C und wird mit $\widehat{C}$ bezeichnet.*

Lemma 4 *Sei X ein Zufallsvektor mit multivariater Tail-Funktion $\bar{F}$ ($\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = Prob(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_d > x_d)$) und Randverteilungsfunktionen F_i, $i = 1, 2, \ldots, d$. Sei $\bar{F}_i = 1 - F_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Es gilt*

$$\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \widehat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \ldots, \bar{F}_d(x_d))$$

Lemma 5 *Es gilt $\widehat{C}(1-u_1, 1-u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$.*

Theorem 17 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und Copula C. Es gilt*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u} \text{ und}$$

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}$$

vorausgesetzt die Limes existieren.

Beispiel 14 *Die Gumbel Familie von Copulas:*

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right), \ \theta \geq 1$$

Es gilt $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$, $\lambda_L = 0$.

Beispiel 15 *Die Clayton Familie von Copulas:*

$$C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta}, \ \theta > 0$$

Es gilt $\lambda_U = 0$, $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$.

Elliptische Copulas

Definition 14 *Sei X ein d-dimensionaler Zufallsvektor, seien $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ zwei Konstanten, und sei $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $\phi_{X-\mu} = \psi(t^T\Sigma t)$ gilt, wobei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X-\mu$ ist, dann ist X eine elliptisch verteilter Zufallsvektor mit Parameter μ, Σ, ψ: $X \sim E_d(\mu,\Sigma,\psi)$.*

ψ heißt erzeugende Funktion (oder Generator) von X. Für $d=1$ stimmen die elliptischen Verteilungen mit den symmetrischen Verteilungen überein.

Überzeugen Sie sich! Verwenden Sie die stochastische Darstellung einer elliptischen Verteilung.

Theorem 18 *(Stochastische Darstellung)*
Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X ist elliptisch verteilt, $X \sim E_d(\mu,\Sigma,\psi)$ und $rang(\Sigma) = k$, dann und nur dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$, $A^TA = \Sigma$, sowie eine nicht negative Zufallsvariable R und einen k-dimensionalen auf der Einheitskugel $\mathcal{S}^{k-1} = \{z \in \mathbb{R}^k\colon z^z z = 1\}$ gleichverteilten Zufallsvektor U gibt, sodass R und U unabhängig sind und $X \stackrel{d}{=} \mu + RAU$.

Anmerkung: Eine elliptische Verteilung X ist *radial symmetrisch*: $X - \mu \stackrel{d}{=} \mu - X$.

Definition 15 *Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen $F_1, F_2, \ldots, F_d$. Die eindeutige Copula C von F, $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$, heißt elliptische Copula.*

Beispiel 16 *Gauss'sche Copulas*
Sei C_R^{Ga} die Copula einer d-dimensionalen standard Normalverteilung mit Korrelationsmatrix R:

$$C_R^{Ga}(u) = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_d)),$$

wobei ϕ_R^d die Gesamtverteilungsfunktion einer d-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor 0 und Korrelationsmatrix R und ϕ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion einer univariaten standard Normalverteilung ist. C_R^{Ga} heißt Gauss'sche Copula.

Im bivariaten Fall gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$.

t-Copula: ein weiteres Beispiel elliptischer Copulas

Definition 16 *Sei* $X \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z \sim t_d(\mu, \nu, \Sigma)$*, wobei* $\mu \in \mathbb{R}^d$*,* $\nu \in \mathbb{N}$*,* $\nu > 1$*,* $S \sim \chi^2_\nu$ *und* $Z \sim N_d(0, \Sigma)$*, und* S *und* Z *unabhängig sind. Es heißt,* X *hat eine* d*-dimensionale* t*-Verteilung mit Mittelwert* μ *(für* $\nu > 1$*) und Kovarianzmatrix* $Cov(X) = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ *(für* $\nu > 2$*).* $Cov(X)$ *existiert nicht für* $\nu \leq 2$*.*

Definition 17 *Die Copula* $C^t_{\nu,R}$ *von* X *heißt* t*-Copula. Für die* t*-Copula gilt:*

$$C^t_{\nu,R}(u) = t^d_{\nu,R}(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)).$$

$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$*,* $i, j = 1, 2 \ldots, d$*, ist die Korrelationsmatrix von* Z*,*

$t^d_{\nu,R}$ *ist die Verteilungsfunktion von* $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Y$*, wobei* $S \sim \chi^2_\nu$ *und* $Y \sim N_d(0, R)$ *unabhängig sind, und* t_ν *sind die Randverteilungen von* $t^d_{\nu,R}$*.*

Bivariater Fall ($d = 2$):

$$C^t_{\nu,R}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} dx_1 dx_2,$$

für $\rho \in (-1, 1)$. R_{12} ist der lineare Korrelationskoeffizient der dazugehörigen bivariaten t_ν-Verteilung für $\nu > 2$.