

Lemma 1 Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion und $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die verallgemeinerte inverse Funktion von h . Es gelten dann folgende Aussagen:

1. h ist stetig $\iff h^{\leftarrow}$ ist streng monoton steigend.

2. h ist streng monoton steigend $\iff h^{\leftarrow}$ ist stetig.

3. $h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$

4. h ist streng monoton steigend $\implies h^{\leftarrow}(h(x)) = x$.

5. h ist stetig $\implies h(h^{\leftarrow}(y)) = y$.

Lemma 2 Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F . Es gilt: $P(X = x: F^{\leftarrow}(F(x)) = x) = 1$, d.h. $F^{\leftarrow}(F(x)) \stackrel{f.s.}{=} x$

Theorem 9 Sei G eine Verteilungsfunktion in \mathbb{R} .

1. *Quantil-Transformation:*

Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*

Sei Y eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion G . Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.

Theorem 10 (Sklar, 1959)

Sei $F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Es existiert eine Copula C , sodass für alle $x_1, x_2, \dots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)). \quad (6)$$

Wenn F_1, \dots, F_d stetig, dann ist C eindeutig.

Vice-versa, sei C eine Copula und F_1, \dots, F_d Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (6) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d .

C aus (6) heißt Copula von F . Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion F heißt C auch Copula von X .

Korollar 1 Sei F eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Die eindeutige Copula von F ist folgendermaßen gegeben:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

Theorem 11 (Copula-Invarianz bzgl. streng monotonen Transformationen)

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d und Copula C . Seien T_1, T_2, \dots, T_d streng monoton steigende Funktionen in \mathbb{R} . Dann ist C auch eine Copula von $(T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_d(X_d))^T$.

Beispiel 9 Sei $X \sim N_d(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma = R$ die Korrelationsmatrix von X ist. Seien ϕ_R und ϕ die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_1 . Die Copula von X ist die so genannte Gauss'sche Copula C_R^{Ga} :

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_d)).$$

C_R^{Ga} ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung $N_d(0, \Sigma)$ mit Korrelationsmatrix R .

Für $d = 2$ und $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$ gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$

Theorem 12 (Fréchet Schranken)

Für jede Copula gilt

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^d u_k - d + 1, 0 \right\} \leq C(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\}.$$

Notation: Untere Schranke $=: W_d$ und obere Schranke $=: M_d$, für $d \geq 2$. Für $d = 2$ setzen wir $M := M_2$, $W := W_2$.

Anmerkung: Ein analoges Ergebnis wie im Satz 12 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen F mit Randverteilungen F_i , $1 \leq i \leq d$:

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^d F_k(x_k) - d + 1, 0 \right\} \leq F(x_1, x_2, \dots, x_d) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)\}.$$

Beispiel 10 Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke W_d für $d \geq 3$ keine Copula ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Mengenfunktion Q

$$Q([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]) = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \dots \sum_{k_d=1}^2 (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d})$$

wobei $(a_1, a_2, \dots, a_d), (b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_k \leq b_k$ und $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Theorem 13 Für jedes $d \geq 3$ und jedes $u \in [0, 1]^d$, es existiert eine Copula $C_{d,u}$, sodass $C_{d,u}(u) = W_d(u)$.

Anmerkung: Für jedes $d \geq 2$ ist die Fréchet obere Schranke M_d eine Copula.

Beispiel 11 M und W sind Copulas.

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X . Seien $Y = T(X)$ und $Z = S(X)$ zwei Zufallsvariablen, wobei T und S zwei streng monotone Funktionen, T steigend und S fallend, sind. Zeigen Sie, dass M die Copula von $(X, T(X))^T$ und W die Copula von $(X, S(X))^T$ ist.

Co-Monotonie und Anti-Monotonie

Definition 9 X_1 und X_2 heißen *co-monoton* wenn M eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist. X_1 und X_2 heißen *anti-monoton* wenn W eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist.

Theorem 14 Angenommen eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist W oder M . Es existieren dann zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z , sodass

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z)).$$

Falls M die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann sind α und β monoton steigend, falls W die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann ist α monoton steigend und β monoton fallend.

Wenn die Randverteilungen F_1 und F_2 von $(X_1, X_2)^T$ stetig sind, dann gilt:

$C = W \iff X_2 = T(X_1)$ fast sicher, $T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$ monoton fallend

$C = M \iff X_2 = T(X_1)$ fast sicher, $T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$ monoton steigend

Beweis: In McNeil et al., 2005.