

**Lemma 1** Sei  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton steigende Funktion und  $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die verallgemeinerte inverse Funktion von  $h$ . Es gelten dann folgende Aussagen:

1.  $h$  ist stetig  $\iff h^{\leftarrow}$  ist streng monoton steigend.

2.  $h$  ist streng monoton steigend  $\iff h^{\leftarrow}$  ist stetig.

3.  $h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$

4.  $h$  ist streng monoton steigend  $\implies h^{\leftarrow}(h(x)) = x$ .

5.  $h$  ist stetig  $\implies h(h^{\leftarrow}(y)) = y$ .

**Lemma 2** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$ . Es gilt:  $P(X = x: F^{\leftarrow}(F(x)) = x) = 1$ , d.h.  $F^{\leftarrow}(F(x)) \stackrel{f.s.}{=} x$

**Theorem 9** Sei  $G$  eine Verteilungsfunktion in  $\mathbb{R}$ .

1. *Quantil-Transformation:*

Wenn  $U \sim U(0,1)$  (standard Gleichverteilung), dann gilt  $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$ .

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*

Sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion  $G$ . Es gilt  $G(Y) \sim U(0,1)$ .

**Theorem 10** (Sklar, 1959)

Sei  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$  eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ . Es existiert eine Copula  $C$ , sodass für alle  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)). \quad (6)$$

Wenn  $F_1, \dots, F_d$  stetig, dann ist  $C$  eindeutig.

Vice-versa, sei  $C$  eine Copula und  $F_1, \dots, F_d$  Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion  $F$  aus (6) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ .

$C$  aus (6) heißt Copula von  $F$ . Für ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  mit Gesamtverteilungsfunktion  $F$  heißt  $C$  auch Copula von  $X$ .

**Korollar 1** Sei  $F$  eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ . Die eindeutige Copula von  $F$  ist folgendermaßen gegeben:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

**Theorem 11** (Copula-Invarianz bzgl. streng monotonen Transformationen)

Sei  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen  $F_1, F_2, \dots, F_d$  und Copula  $C$ . Seien  $T_1, T_2, \dots, T_d$  streng monoton steigende Funktionen in  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $C$  auch eine Copula von  $(T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_d(X_d))^T$ .

**Beispiel 9** Sei  $X \sim N_d(0, \Sigma)$  wobei  $\Sigma = R$  die Korrelationsmatrix von  $X$  ist. Seien  $\phi_R$  und  $\phi$  die Verteilungsfunktionen von  $X$  bzw.  $X_1$ . Die Copula von  $X$  ist die so genannte Gauss'sche Copula  $C_R^{Ga}$ :

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_d)).$$

$C_R^{Ga}$  ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung  $N_d(0, \Sigma)$  mit Korrelationsmatrix  $R$ .

Für  $d = 2$  und  $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$  gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$

**Theorem 12** (Fréchet Schranken)

Für jede Copula gilt

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^d u_k - d + 1, 0 \right\} \leq C(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\}.$$

Notation: Untere Schranke  $=: W_d$  und obere Schranke  $=: M_d$ , für  $d \geq 2$ . Für  $d = 2$  setzen wir  $M := M_2$ ,  $W := W_2$ .

**Anmerkung:** Ein analoges Ergebnis wie im Satz 12 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen  $F$  mit Randverteilungen  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ :

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^d F_k(x_k) - d + 1, 0 \right\} \leq F(x_1, x_2, \dots, x_d) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)\}.$$

**Beispiel 10** Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke  $W_d$  für  $d \geq 3$  keine Copula ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Mengenfunktion  $Q$

$$Q([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]) = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \dots \sum_{k_d=1}^2 (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d})$$

wobei  $(a_1, a_2, \dots, a_d), (b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$  mit  $a_k \leq b_k$  und  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

**Theorem 13** Für jedes  $d \geq 3$  und jedes  $u \in [0, 1]^d$ , es existiert eine Copula  $C_{d,u}$ , sodass  $C_{d,u}(u) = W_d(u)$ .

**Anmerkung:** Für jedes  $d \geq 2$  ist die Fréchet obere Schranke  $M_d$  eine Copula.

**Beispiel 11**  $M$  und  $W$  sind Copulas.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . Seien  $Y = T(X)$  und  $Z = S(X)$  zwei Zufallsvariablen, wobei  $T$  und  $S$  zwei streng monotone Funktionen,  $T$  steigend und  $S$  fallend, sind. Zeigen Sie, dass  $M$  die Copula von  $(X, T(X))^T$  und  $W$  die Copula von  $(X, S(X))^T$  ist.

## Co-Monotonie und Anti-Monotonie

**Definition 9**  $X_1$  und  $X_2$  heißen *co-monoton* wenn  $M$  eine Copula von  $(X_1, X_2)^T$  ist.  $X_1$  und  $X_2$  heißen *anti-monoton* wenn  $W$  eine Copula von  $(X_1, X_2)^T$  ist.

**Theorem 14** Angenommen eine Copula von  $(X_1, X_2)^T$  ist  $W$  oder  $M$ . Es existieren dann zwei monotone Funktionen  $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Zufallsvariable  $Z$ , sodass

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z)).$$

Falls  $M$  die Copula von  $(X_1, X_2)^T$  ist, dann sind  $\alpha$  und  $\beta$  monoton steigend, falls  $W$  die Copula von  $(X_1, X_2)^T$  ist, dann ist  $\alpha$  monoton steigend und  $\beta$  monoton fallend.

Wenn die Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$  von  $(X_1, X_2)^T$  stetig sind, dann gilt:

$C = W \iff X_2 = T(X_1)$  fast sicher,  $T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$  monoton fallend

$C = M \iff X_2 = T(X_1)$  fast sicher,  $T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$  monoton steigend

Beweis: In McNeil et al., 2005.