Koherente Risikomaße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignismenge Ω, Ereignisalgebra $\mathcal{F}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Sei $L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller Zufallsgrößen aus $(\Omega, \mathcal{F})$, die fast sicher endlich sind.

Sei $M \subseteq L^{(0)}$.

Sei $\rho: M \to \mathbb{R}$ ein Risikomaß in M

Definition 6 *Ein Risikomaß ρ, das folgende Eigenschaften besitzt, heißt koherent auf M:*

(C1) *Invarianz bzgl. Translation:*

$\rho(X + r) = \rho(X) + r$, *für jede Konstante r und jedes $X \in m$.*

(C2) *Subadditivität:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

(C3) *Positive Homogenität:*

$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in M$.

(C4) *Monotonie:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $X_1 \overset{f.s.}{\leq} X_2 \Longrightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

Konvexe Risikomaße

Betrachte die Eigenschaft

(C5) Konvexität:

$\forall X_1, X_2 \in M$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

(C5) ist schwächer als (C2) und (C3), d.h. (C2) und (C3) zusammen implizieren (C5) aber nicht umgekehrt.

Definition 7 *Ein Risikomaß ρ, das die Eigenschaften (C1),(C4) und (C5) besitzt, heißt koherent auf M.*

Beispiel 8 *VaR ist nicht koherent*

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch einer beliebigen kontinuierlichen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung F definiert.

$VaR_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ *besitzt die Eigenschaften (C1), (C3) und (C4).*

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die Binomialverteilung $B(p, n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, definiert.

Beispiel 8 (Folgerung)

$VaR_\alpha(B(p,n))$ ist nicht subadditiv.

ZB.: Berechnen Sie den VaR der Verluste eines Bond-Portfolios bestehend aus 100 Bonds, die unabhängig von einander mit Wahrscheinlichkeit p defaultieren. Beobachten Sie, dass dieser Wert größer als das Hunderfache des VaRs des Verlustes eines einzigen Bonds ist.

Theorem 6 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $M \subseteq L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *die Menge aller in* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *definierten Zufallsvariablen mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung* F*.* $CVaR_\alpha$ *ist eine koherentes Risikomaß in M,* $\forall \alpha \in (0,1)$*.*

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Betrachte d Aktien und die Klasse $\mathcal{P}$ aller Portfolios bestehend aus diesen Aktien.

Jedes (long-short) Portfolio aus $\mathcal{P}$ ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \right\}$$

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ ein Zufallsvektor, der die Rendite der d Aktien darstellt. Sei $E(X) = \mu$.

Die Portfoliorendite ist die Zufallsvariable $Z(w) = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i$.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \mathbf{\Sigma}, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\mathbf{\Sigma} = cov(X)$.

Sei $\mathcal{E}_m$ die Klasse jener PF aus $\mathcal{P}$ sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{E}_m = \{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1, w^T \mu = m \}$$

Das **Mean-Variance PF-Optimierungsmodell** (Markowitz 1952, 1987)

$$\min_{w \in \mathcal{E}_m} var(Z(w)) \tag{3}$$

Sei ρ ein Risikomaß. Das **Mean-ρ PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{E}_m} \rho(Z(w)) \tag{4}$$

Sei $\rho = VaR_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Das **Mean-VaR PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{E}_m} VaR_\alpha(Z(w)) \tag{5}$$

Frage: Wie hängen die Probleme (3) und (4) (insbesondere (5)) zusammen?

Theorem 7 *Sei M die Menge der erwarteten Rendeite der Portfolii aus $\mathcal{P}$. Die Risikofaktoren, d.h. die Rendite der einzelnen Aktien seien aaliptisch verteilt, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ für gegebene $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Var_α ist koherent auf M, für jedes $\alpha \in (0.5, 1)$.*

Theorem 8 *(Embrechts et al., 2002)*

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, und einem spherisch verteilten Zufallsvektor $Y \sim S_k(\psi)$ und $E(X_k^2) < \infty$, $\forall k$. Sei ρ ein Risikomaß, das die Eigenschaften (1) und (2) besitzt, und $\rho(Y_1) \geq 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente des spherisch verteilten Zufallsvektors Y ist.

Es gilt dann:

$$\textit{arg}\min\{\rho(Z(w))\colon w \in \mathcal{E}_m\} = \textit{arg}\min\{var(Z(w))\colon w \in \mathcal{E}_m\}$$

Einführung in Copulas: Grundlegende Eigenschaften

Definition 8 *Eine d-dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf* $[0,1]^d$ *deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf* $[0,1]$ *sind.*

Oder äquivalent:

Eine Copula C *ist eine Funktion* $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$*, die folgende Eigenschaften hat:*

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ *ist mon. steigend in jeder Variable* u_i*,* $1 \le i \le d$*.*
2. $C(1, 1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ *für jedes* $k \in \{1, \dots, d\}$*,* $u_k \in [0,1]$*.*
3. *Folgende Ungleichung (sogenannte Rechtecksungleichung) gilt für alle* $(a_1, a_2, \dots, a_d)$*,* $(b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0,1]^d$ *mit* $a_k \le b_k$*,* $\forall k \in \{1, 2, \dots, d\}$*:*

$$\sum_{k_1=1}^{2} \dots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d}) \ge 0$$

wobei $u_{j1} = a_j$ *und* $u_{j2} = b_j$*.*

Anmerkung: Für $2 \le k \le d$ sind die k-dimensionalen Randverteilungen einer d-dimensionalen Copula wieder Copulas, k-dimensionale Copulas.