Risikomanagement: Hintergrund und Ziele

Beispiel 1 *Anfangskapital* $V_0 = 100$

Spiel: man verliert oder gewinnt 50 mit Wahrsch. jeweils 1/2.

Kapital nach dem Spiel $V_1 = \begin{cases} 150 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 50 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \end{cases}$

Sei $X := V_1 - V_0$ der Gewinn/Verlust. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X heißt **Gewinn/Verlust Verteilung** *(GVV)*

Die Verteilungsfunktion von $L := V_0 - V_1$ heißt **Verlustverteilung**.

$L >= 0 \Rightarrow$ Risiko!

Viele Leute hätten lieber keinen Gewinn und keinen Verlust mit Sicherheit als entweder Gewinn oder Verlust von 50 Einheiten mit Wahrsch. von jeweils 1/2. **Risikoaversion!**

Die Entscheidung, ob gespielt wird oder nicht, hängt von der Verlustverteilung ab. Diese ist aber in der Regel unbekannt!

Definition 1 *Ein Risikomaß* ρ *ist eine Abbildung der Zufallsvariablen zu den reellen Zahlen, die jeder Zufallsvariable* L *eine reelle Zahl* $\rho(L) \in \mathbb{R}$ *zuordnet.*

Bsp. Standardabweichung, Quantil der Verlustverteilung, ...

Warum Risikomanagement

Das Volumen des risikoreichen Handels im Globalen Markt steigt kontinuierlich

Global OTC Derivatives: Nominalwert in Trillionen von USD*

Kontrakte	2007	2006	2005	2004	2003	2002
interest rate derivatives	382,3	285,7	213,2	164,5	142,3	99,8
credit default swaps	62,2	34,4	17,1	5,44	3,78	2,15
equity derivatives	10	7,2	5,6	4,2	3,4	2,5

Beispiele großer Verluste in den Finanzmärkten
(siehe zB. `http://www.erisk.com`)

- Orange County (1994)
- LTCM (1998)
- BAWAG (2006)
- Lehman Brothers (2008)
- Barings Bank (1995)
- Bankgesellschaft Berlin (2001)
- Fannie May and Freddie Mac (2008)
- Hypo Real Estate (2008)

*Quelle: ISDA - International Swaps and Derivatives Association, Inc. `http://www.isda.org`

Regulierung und Aufsicht

Gründung des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht in 1974.

Sicherheitskapital abhängig von der GVV.
Basler Ausschuss: Vorschläge und Richtlinien über Anforderungen und Methoden zur Berechnung des Sicherheitskapitals
International akzeptierte Standards für die Berechnung des Volumens des Sicherheitskapitals sowie darauf basierende gesetzliche Bestimmungen werden angestrebt.
Kontrolle durch die Aufsichtsbehörde.

1988 Basel I: Internationale Mindestkapitalanforderungen insbesondere bzgl. Kreditrisiko.

1996 Novelle formuliert standardisierte Modelle für Marktrisiko mit einer Option für größere Banken zur Verwendung von Value at Risk (VaR) Modellen.

2007 Basel II: Mindestkapitalanforderungen (bzgl. Kredit- und Marktrisiko sowie bzgl. operationelle Risiken), aufsichtliche Überprüfungsverfahren, Marktdisziplin*.

*Siehe `http://www.bis.org`

Risikotypen

Für eine Organisation entsteht Risiko durch Ereignisse oder Handlungen, das/der die Organisation verhindern könnten ihre Verpflichtungen zu erfüllen bzw. ihre Strategien durchzuführen.

Finanzielles Risiko:

- Marktrisiko
- Kreditrisiko
- Operationelles Risiko
- Liquiditätsrisiko, Rechtliches Risiko, Rufschädigungsrisiko

Finanzderivate sind Finanzprodukte oder Kontrakte, die aus einem fundamentalen Basiswert (zB. Aktienpreis, Aktienindex, Zinssatz, Rohstoffpreis) abgeleitet werden.

Definition 2 *Eine* Europäische Call Option (ECO) *an einer bestimmten Aktie S gibt dem Besitzer das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie S an einem Tag T um einen Preis K zu kaufen. Die Option wird um einen bestimmten Preis am Tag* 0 *erworben.*

Wert der ECO zum Zeitpunkt t: $C(t) = \max\{S(t) - K, 0\}$,
wobei $S(t)$ der Preis der Aktie S zum Zeitpunkt t ist.

Definition 3 *Eine Nullkuponanleihe mit Laufzeit T ist ein Kontrakt, das dem Besitzer eine Währungseinheit zum Zeitpunkt T bringt.*

Definition 4 *Ein Währung-Forward ist ein Kontrakt zwischen zwei Parteien, der dem Käufer das Recht einräumt, eine bestimmte Menge $\bar{V}$ einer fremden Währung zu einem bestimmten Zeitpunkt T und zu einem bestimmten Wechselkurs $\bar{e}$ vom Verkäufer zu erwerben.*

Verlustoperatoren

$V(t)$ - Wert des PF zum Zeitpunkt t

Zeithorizont Δt

Verlust: $L_{[t,t+\Delta t]} := -(V(t+\Delta t) - V(t))$

Diskretisierung der Zeit: $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$L_{n+1} := L_{[t_n, t_{n+1}]} = L_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t]} = -(V_{n+1} - V_n),$$

wobei $V_n = V(n\Delta t)$

Beispiel 2 *Ein Aktienportfolio*

Das Portfolio besteht aus α_i Stück von Aktie A_i, $i = 1, 2, \ldots, d$.

$S_{n,i}$ Preis von Aktie i zum Zeitpunkt n.

$V_n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{n,i}$

$X_{n+1,i} := \ln S_{n+1,i} - \ln S_{n,i}$, $Z_{n,i} := \ln S_{n,i}$

Seien $w_{n,i} := \alpha_i S_{n,i}/V_n$, $i = 1, 2, \ldots, d$, die relativen Portfoliogewichte.

Verlustoperatoren eines Aktienportfolios

Es gilt

$$L_{n+1} := -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{n,i}\Big(\exp\{X_{n+1,i}\}-1\Big) = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i}\Big(\exp\{X_{n+1,i}\}-1\Big) =: l_n(X_{n+1})$$

Linearisierung: $e^x = 1 + x + o(x^2) \sim 1 + x$

$$L^{\triangle}_{n+1} = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i} X_{n+1,i} =: l^{\triangle}_n(X_{n+1})$$

Der allgemeiner Fall

$V_n = f(t_n, Z_n)$; $Z_n = (Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,d})$ ist ein Vektor von Risikofaktoren

Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{n+1} = Z_{n+1} - Z_n$

$L_{n+1} = -\Big(f(t_{n+1}, Z_n + X_{n+1}) - f(t_n, Z_n)\Big) =: l_n(X_{n+1})$ wobei

$l_n(x) := -\Big(f(t_{n+1}, Z_n + x) - f(t_n, Z_n)\Big)$ ist der Verlustoperator

Der linearisierter Verlust:

$L^{\Delta}_{n+1} = -\Big(f_t(t_n, Z_n)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t_n, Z_n) X_{n+1,i}\Big)$,

wobei f_t und f_{z_i} die partiellen Ableitungen von f sind.

Der linearisierter Verlustoperator:

$l^{\Delta}_n(x) = -\Big(f_t(t_n, Z_n)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t_n, Z_n) x_i\Big)$

Beispiel 3 *Ein Anleihen-Portfolio*

Sei $B(t,T)$ der Preis der Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt $t < T$.

Die kontinuierliche Rendite (yield) - $y(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T)$ - wird interpretiert als der kontinuierlicher Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für den gesamtem Zeitraum $[t,T]$ vereinbart wurde.

Für unterschiedliche Laufzeiten gibt es unterschiedliche Rendite.

Renditenkurve (yield curve) zum fixen Zeitpunkt t: $T \mapsto y(t,T)$

PF besteht aus α_i Stück der Nullkuponanleihe i mit Laufzeit T_i und Preis $B(t,T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

PF-Wert:

$V_n = \sum_{i=1}^d \alpha_i B(t_n, T_i) = \sum_{i=1}^d \alpha_i exp\{-(T_i - t_n) Z_{n,i}\} = f(t_n, Z_n)$

Risikofaktoren: $Z_{n,i} = y(t_n, T_i)$

$$l_{[n]}(x) = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i) \left(exp\{Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1})x_i\} - 1 \right)$$

$$L^{\triangle}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i) \left(Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1}) X_{n+1,i} \right)$$

Beispiel 4 *Ein Währung-Forward-Portfolio*

Die Partei, die die fremde Währung kauft hält eine *Long Position*. Die Partei, die verkauft, hält eine *Short Position*.

Long Position über ($\bar{V}$) Einheiten in einem Währung-Forward $\Longleftrightarrow$
Long Position über $\bar{V}$ Einheiten in einer fremden Nullkuponanleihe (NCA)
und
Short Position über $\bar{e}\bar{V}$ Einheiten in einer einheimischen Nullkuponanleihe.

Annahmen:

Euro-Investor hält eine Long Position in ein USD/EUR Forward über $\bar{V}$ USD.

Sei $B^f(t,T)$ ($B^d(t,T)$) der Preis einer USD- (EUR)-basierten NCA.

Sei $e(t)$ der Kassa Wechselkurs (spot exchange rate) für USD/EUR.

Wert der Long Position des Währung-Forwards zum Zeitpunkt T : $V_T = \bar{V}(e(T) - \bar{e})$.

Die Short Position in der einheimischen NCA kann wie im Beispiel (3) behandelt werden.

Die Long Position in der fremden NCA:

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln e(t_n), y^f(t_n,T))^T$

Wert der Long Position: $V_n = \bar{V} \exp\{Z_{n,1} - (T - t_n)Z_{n,2}\}$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -V_n(Z_{n,2}\Delta t + X_{n+1,1} - (T - t_n)X_{n+1,2})$

Beispiel 5 *Europäische Call Option*

Europäische Call Option in einer Aktie S mit Laufzeit T und Ausübungspreis (*Strikepreis*) K.

Wert der Call Option zum Zeitpunkt T: $\max\{S_T - K, 0\}$

Preis zum Zeitpunkt $t < T$: $C = C(t, S, r, \sigma)$ (Black-Scholes Modell), wobei t ist die Zeit, S ist der Preis zum Zeitpunkt t, r ist der Zinssatz, σ ist die Volatilität.

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln S_n, r_n, \sigma_n)^T$;

$X_{n+1} = (\ln S_{n+1} - \ln S_n, r_{n+1} - r_n, \sigma_{n+1} - \sigma_n)^T$

PF-Wert: $V_n = C(t_n, S_n, r_n, \sigma)$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -(C_t \Delta t + C_S S_n X_{n+1,1} + C_r X_{n+1,2} + C_\sigma X_{n+1,3})$

The greeks: C_t - theta, C_S - delta, C_r - rho, C_σ - Vega

Verwendungszweck von Risikomanagement:

- Bestimmung der Mindestkapitalanforderungen:
  Kapital, das benötigt wird um event. Verluste abzudecken.

- Als Management Tool:
  zur Bestimmung der Risiken, die unterschiedliche Einheiten einer Firma eingehen dürfen.

Einige Grundlegende Risikomaße

- Gewichtete Summe der Aktiva (Assetklassenspezifische Gewichte)

  ZB. Basel I (1998):

  $$\textit{Cooke Ratio} = \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{risikogewichtete Summe der Aktiva}} \geq 8\%$$

  $$\text{Gewicht} := \begin{cases} 0 & \text{für Forderungen gegenüber staatlichen Schuldnern (OECD-Staaten)} \\ 20 & \text{für Forderungen gegenüber Kreditinstituten} \\ 50 & \text{für grundpfandrechtlich gesicherte Realkredite} \\ 100 & \text{für alle sonstigen Risikoaktiva, d. h. alle Kredite an Unternehmen} \end{cases}$$

  Nachteile: Kein Unterschied zwischen Long und Short Positionen, berücksichtigt keine Diversifikationseffekte.

- Sensitivität gegenüber Risikofaktoren

  Portfoliowert zum Zeitpunkt t_n: $V_n = f(t_n, Z_n)$,
  Z_n ist ein Vektor von d Risikofaktoren

  Sensitivitätskoeffizienten: $f_{z_i} = \frac{\delta f}{\delta z_i}(t_n, Z_n)$, $1 \le i \le d$

  Beispiel: "The Greeks" eines PF sind die Sens.koeffizienten

  Nachteile: Aggregierung zum Risikomaß bei simultanen Veränderungen von mehreren Faktoren schwierig;
  bei mehreren Märkten ist Aggregierung zum Risikomaß für das Gesamtportfolio schwierig;

- Szenario basierte Risikomaße

  Sein N die Anzahl möglicher Veränderungen der Risikofaktoren (= Szenarien).

  Sei $\chi = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ die Menge der Szenarien und
  $l_{[n]}(\cdot)$ der Verlustoperator des PF.

  Jedem Szenario wird ein Gewicht w_i, $1 \le i \le N$, zugeordnet

  Portfoliorisiko:

  $\Psi[\chi, w] = \max\{w_1 l_{[n]}(X_1), w_2 l_{[n]}(X_2), \ldots, w_N l_{[n]}(X_N)\}$

Beispiel 6 *SPAN Regeln verwendet von CME* (siehe Artzner et al., 1999)

PF besteht aus mehreren einheiten eines Future Kontrakts und mehreren Put bzw. Call Optionen desselben Kontakts mit gleicher Laufzeit.

Berechnung der SPAN Marge:

Szenarien i, $1 \leq i \leq 14$*:*

Szenarien 1 bis 8		*Szenarien 9 bis 14*	
Volatilität	*Preis der Future*	*Volatilität*	*Preis der Future*
$\nearrow$ $\searrow$	$\nearrow \frac{1}{3} * Range$ $\nearrow \frac{2}{3} * Range$ $\nearrow \frac{3}{3} * Range$ $\longrightarrow$	$\nearrow$ $\searrow$	$\searrow \frac{1}{3} * Range$ $\searrow \frac{2}{3} * Range$ $\searrow \frac{3}{3} * Range$

Szenarien i, $i = 15, 16$ *stellen extreme Bewegungen nach oben bzw. unten des Futurepreises*

$$w_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq 14 \\ 0,35 & 15 \leq i \leq 16 \end{cases}$$

Ein bestimmtes Modell (zB. Black-Scholes) wird verwendet um die Optionpreise in den entsprechenden Szenarien zu generieren.