Name: **Matrikelnr:**

Risikotheorie und -management
6. Februar 2009

Aufgabe:	1	2	3	4		
Punkte:	5	5	5	5		
					=	*Punkte*

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begründen!

1. Ein einheimischer Investor investiert in Euro in ein Portfolio mit folgenden drei Positionen: FTSE 100 (Financial Times 100 Shares Index), S&P 500 (Standard and Poor's 500) und SMI (Swiss Market Index). Die Portfoliogewichte betragen jeweils 30%, 40% und 30%. Es wird angenommen, dass das Portfolio zum Zeitpunkt t standartisiert wird (d.h., das Portfolio hat Wert 1 Euro zum Zeitpunkt t). Geben Sie den Verlustoperator $l_{[t]}(x)$ und den linearisierten Verlustoperator $l^{\Delta}_{[t]}(x)$ an, wobei x der Vektor der Veränderungen der Risikofaktoren ist. Welche unmittelbare Risiken müssen berücksichtigt werden?

2. Betrachten Sie zwei Zufallsvariablen Z_1 und Z_2, die die Verluste zweier Portfolii darstellen. Sei $Z_1 \sim N(0,1)$, $Z_2 \sim N(0,1)$ und $\rho_L(Z_1, Z_2) = 0$.

   Geben Sie zwei Zufallsvektoren $(X_1, X_2)^T$ und $(Y_1, Y_2)^T$ an, die die obigen Annahmen erfüllen, d.h. $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ und $\rho_L(X_1, X_2) = 0$, $\rho_L(Y_1, Y_2) = 0$, für die es dennoch $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha) \neq F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, gilt. $F_{X_1+X_2}$ ($F_{Y_1+Y_2}$) ist die Verteilungsfunktion der Summe $X_1 + X_2$ ($Y_1 + Y_2$).

   Hinweis: Setzen Sie $X = (X_1, X_2) \sim N_2(0, I_2)$ und $(Y_1, Y_2) = (X_1, VX_1)$, wobei V eine von X_1 unabhängige diskrete Zufallsvariable mit $P(V = 1) = P(V = -1) = 0.5$ ist und I_2 die Einheitsmatrix in $R^{2\times 2}$ ist.

3. Sei $\alpha \in (0,1)$ und seien X_1, X_2 zwei co-monotone Zufallsvariablen mit stetigen und monoton steigenden Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2. Zeigen Sie, dass $VaR_\alpha(X_1 + X_2) = VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2)$ gilt. D.h. VaR ist additiv für co-monotone Risiken.

   Hinweis: Verwenden Sie

   (a) die Charakterisierung von co-monotonen Zufallsvariablen als monoton steigende Transformationen einer dritten Zufallsvariable.

   (b) die Wahrscheinlichkeitstransformation.

4. Sei C_θ eine vertauschbare ein-parametrische bivariate Copula. Wir konstruieren eine drei-parametrische Familie von bivariaten Copulas als

$$C_{\theta,\alpha,\beta} = u_1^{1-\alpha} u_2^{1-\beta} C_\theta(u_1^\alpha, u_2^\beta) \text{ für } 0 \leq u_1, u_2 \leq 1,$$

wobei $\alpha, \beta \in [0,1]$.

- Zeigen Sie, dass $C_{\theta,\alpha,\beta}$ die Verteilungsfunktion eines folgendermaßen erzeugten Zufallsvektors (U_1, U_2) ist:

  $$U_1 = \max\left\{V_1^{1/\alpha}, \tilde{U}_1^{1/(1-\alpha)}\right\} \text{ und } U_2 = \max\left\{V_2^{1/\beta}, \tilde{U}_2^{1/(1-\beta)}\right\}, \text{ wobei}$$

  (V_1, V_2) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C_θ ist und $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2 \sim U([0,1])$ zwei von (V_1, V_2) und untereinander unabhängige Zufallsvariablen sind. Folgern Sie dann, dass $C_{\theta,\alpha,\beta}$ tatsächlich eine Copula ist.

- Sind die Unabhängigkeitscopula und die Copula C_θ Elemente der Famile $C_{\theta,\alpha,\beta}$? Ist $C_{\theta,\alpha,\beta}$ vertauschbar?