① $V_t = 1$

			Preis Z.Punkt t	Preis Z.Punkt t+1
α_1	Stück	FTSE 100	$S_{t,1}$ (GBP)	$S_{t+1,1}$ (GBP)
α_2	Stück	S&P 500	$S_{t,2}$ (USD)	$S_{t+1,2}$ (USD)
α_3	Stück	SMI	$S_{t,3}$ (EUR)	$S_{t+1,3}$ (EUR)

Risikofaktoren: Preise

Veränderung Risikofaktoren sind die logarithmierten Returns

$$X_1 = \ln \frac{S_{t+1,1}}{S_{t,1}} \quad X_2 = \ln \frac{S_{t+1,2}}{S_{t,2}} \quad X_3 = \ln \frac{S_{t+1,3}}{S_{t,3}}$$

Weitere Risikofaktoren: Wechselkurse EUR|GBP, EUR|USD

Sei $k_{t,1}$ ($k_{t+1,1}$) Wechselkurs EUR|GBP zum Z.Punkt t ($t+1$)

$k_{t,2}$ ($k_{t+1,2}$) —"— EUR|USD " t ($t+1$)

Veränderung Risikofaktoren: $X_4 = \ln \frac{k_{t+1,1}}{k_{t,1}}$, $\ln \frac{k_{t+1,2}}{k_{t,2}} =: X_5$

$$V_t = \alpha_1 \cdot k_{t,1} S_{t,1} + \alpha_2 k_{t,2} S_{t,2} + \alpha_3 S_{t,3}$$

$$V_{t+1} = \alpha_1 k_{t+1,1} S_{t+1,1} + \alpha_2 k_{t+1,2} S_{t+1,2} + \alpha_3 S_{t+1,3}$$

$$\text{Verlust} = V_t - V_{t+1} = -\Big[\alpha_1 (k_{t+1,1} S_{t+1,1} - k_{t,1} S_{t,1}) + \alpha_2 (k_{t+1,2} S_{t+1,2} - k_{t,2} S_{t,2}) + \alpha_3 (S_{t+1,3} - S_{t,3})\Big]$$

$$= -\Big[\alpha_1 k_{t,1} S_{t,1} \Big(\frac{k_{t+1,1}}{k_{t,1}} \frac{S_{t+1,1}}{S_{t,1}} - 1\Big) + \alpha_2 k_{t,2} S_{t,2} \Big(\frac{k_{t+1,2}}{k_{t,2}} \frac{S_{t+1,2}}{S_{t,2}} - 1\Big) + \alpha_3 S_{t,3} \Big(\frac{S_{t+1,3}}{S_{t,3}} - 1\Big)\Big]$$

$$= -\Big[\underbrace{\frac{\alpha_1 k_{t,1} S_{t,1}}{V_t}}_{=: w_1} (\exp(X_4)\exp(X_1) - 1) + \underbrace{\frac{\alpha_2 k_{t,2} S_{t,2}}{V_t}}_{=: w_2} (\exp(X_5)\exp(X_2) - 1) + \underbrace{\alpha_3 \frac{S_{t,3}}{V_t}}_{=: w_3} (\exp(X_3) - 1)\Big]$$

wobei w_i – Portf. gewichte

D.h. der Verlustoperator ist

$$\ell_t(x_1 x_2 \cdots x_5) = w_1\left(\exp(x_1+x_4)-1\right) + w_2\left(\exp(x_2+x_5)-1\right) + w_3\left(\exp(x_3)-1\right)$$

$$\ell_t^{\Delta}(x_1 x_2 \cdots x_5) = w_1 (x_1+x_4) + w_2(x_2+x_5) + w_3 x_3$$

mit der Approx. 1. Ordnung

$$\exp(x) = 1+x \quad \text{fur} \quad x \approx 0$$

(2) Z_1, Z_2 Verluste zweier Portfolii

$Z_1 \sim N(0,1)$ $\quad Z_2 \sim N(0,1)$

$\rho_L(Z_1, Z_2) = 0$

Zu ~~[illegible]~~ finden:

$(X_1, X_2)^T$ und $(Y_1\ Y_2)^T$ für die gilt:

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$

$\rho_L(X_1\ X_2) = \rho_L(Y_1\ Y_2) = 0$

und aber $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha) \neq F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$.

Sei $(X_1, X_2) \sim N_2(0, I_2)$ mit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

X_1, X_2 unabhängig und $X_1, X_2 \sim N(0,1)$

$\Downarrow$

$\rho_L(X_1\ X_2) = 0$

Sei V eine diskrete ZV mit $P(V=1) = 0.5$ $\ P(V=-1) = 0.5$

und $Y_1 = X_1$ $\quad Y_2 = V \cdot X_1$ wobei V unabh. von X_1

$X_1 \sim N(0,1)$ per Auswahl

$Y_2 = V X_1 \sim N(0,1)$ weil:

$$P(V X_1 \leq x) = P(V X_1 \leq x \mid V = 1)\, P(V=1) + P(V X_1 \leq x \mid V = -1)\, P(V=-1) =$$

$$= 0.5\, (P(X_1 \leq x) + P(-X_1 \leq x)) =$$

$$= 0.5\, (P(X_1 \leq x) + P(X_1 \geq -x)) \underset{\text{weil } X_1 \sim N(0,1)}{=} 2 \cdot 0.5 \cdot P(X_1 \leq x) = P(X_1 \leq x)$$

$V \cdot X_1 \overset{d}{=} X_1 \sim N(0,1)$

$$\rho_L(Y_1\ Y_2) = \frac{\operatorname{cov}(Y_1\ Y_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_1)\operatorname{Var}(Y_2)}} = \operatorname{Cov}(Y_1\ Y_2) = E\left((X_1 - E(X_1))(\cancel{Y_1}\,X_1 - E(\cancel{Y_1}))\right)$$

$$= E(X_1 \cdot V X_1) =$$

$= E(V_1 X_1^2 \mid V_1 = 1) P(V_1 = 1) + E(V_1 X_1^2 \mid V_1 = -1) P(V_1 = -1)$

$= E(X_1^2) P(V_1 = 1) + E(-X_1^2) P(V_1 = -1)$

$= 0.5 (1 + (-1)) = 0$

X_1 u. X_2 unabh. normal verteilt $\Rightarrow$ $X_1 + X_2$ normalverteilt und $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$

$F_{X_1+X_2} = \Phi(\sqrt{2}x)$

$Y_1 + Y_2$ nicht unabhängig.

Wir bestimmen $F_{Y_1+Y_2}$:

$\forall x \geq 0$ gilt:

$F_{Y_1+Y_2}(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x) = P(X_1 + V_1 X_1 \leq x) =$

$= P((1+V_1) X_1 \leq x) = P((1+V_1) X_1 \leq x \mid V_1 = 1) P(V_1 = 1) +$

$+ P(\underbrace{(1+V_1)}_{0} X \leq x \mid V_1 = -1) P(V_1 = -1)$

$= P(2X_1 \leq x)\, 0.5 + P(0 \leq x)\, 0.5 =$

$= 0.5 \left(1 + P\left(X_1 \leq \frac{x}{2}\right)\right) = 0.5 \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$F_{Y_1+Y_2}(x) = 0.5 \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

Für $x < 0$ gilt $F_{Y_1+Y_2}(x) = 1 - F_{Y_1+Y_2}(-x)$ (da dies für X_1, Y_1 gilt, weil symmetrisch)

$\overleftarrow{F}_{X_1+Y_2}(\alpha) = t \Rightarrow F_{X_1+X_2}(t) = \alpha = \Phi(\sqrt{2}t) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2}\, t = \Phi^{-1}(\alpha) \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi^{-1}(\alpha)$

$\overleftarrow{F}_{Y_1+Y_2}(\alpha) = t' \Rightarrow F_{Y_1+Y_2}(t') = \alpha = 0.5\left(1 + \Phi\left(\frac{t'}{2}\right)\right) \Rightarrow$

z.B. für $\alpha = 0.9$ Werte vergl.

$= 2\alpha - 1 = \Phi\left(\frac{t'}{2}\right) \Rightarrow t' = 2\Phi^{-1}(2\alpha - 1)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \overleftarrow{\Phi}(\alpha) \neq 2\overleftarrow{\Phi}(2\alpha-$

... der Regel

(3)

(X_1, X_2) comonoton

$\Downarrow$

$X_2 = T(X_1)$ $\quad T \nearrow$ (Charakt. der Co-Monotonie bei stetigen Vert. Fnk.)

F_1, F_2 Vertfnk von X_1 X_2 mon. steigen

<u>Wir zeigen:</u> $\underline{F_2 = F_1 \circ T^{\leftarrow}}$:

$$F_2(x) = P(X_2 \leq x) = P(T(X_1) \leq x) = P(X_1 \leq T^{\leftarrow}(x))$$

$$= F_1(T^{\leftarrow}(x)) = F_1 \circ T^{\leftarrow}(x).$$

Daraus folgt: $\underline{F_2^{\leftarrow} = T \circ F_1^{\leftarrow}}$

Weiters gilt:

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} \Big(F_1^{\leftarrow}(\underbrace{F_1(X_1)}_{=:\,U}), \; F_2^{\leftarrow}(F_2(X_2)) \Big) =$$

$$= \Big(F_1^{\leftarrow}(U), \; T(F_1^{\leftarrow}(\underbrace{F_1(X_1)}_{U})) \Big) =$$

$$= \big(F_1^{\leftarrow}(U), \; T \circ F_1^{\leftarrow}(U) \big)$$

$U \sim U(0,1)$ aus der Wahrsch. Transf.

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = \mathrm{VaR}_\alpha\big(F_1^{\leftarrow}(U) + T \circ F_1^{\leftarrow}(U) \big) =$$

$= \mathrm{VaR}_\alpha(G(U))$ wobei $G = F_1^{\leftarrow} + T \circ F_1^{\leftarrow}$

Da $T \nearrow$, $F_1 \nearrow$, $F_1^{\leftarrow} \nearrow$ ist $G \nearrow$

Es gilt daher: $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(G(U)) = G(\alpha)$ weil

$$P(G(U) \leq G(\alpha)) = P(U \leq \alpha) = \alpha$$

und weiters

$$G(\alpha) = (F_1^{\leftarrow} + T \circ F_1^{\leftarrow})(\alpha) = F_1^{\leftarrow}(\alpha) + T \circ F_1^{\leftarrow}(\alpha) = F_1^{\leftarrow}(\alpha) + F_2^{\leftarrow}(\alpha)$$

$$= \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$$

(4) C_θ vertauschbare 1-parametrische Copula

Sei

$$C_{\theta,\alpha,\beta}(u_1,u_2) = u_1^{1-\alpha}\, u_2^{1-\beta}\, C_\theta(u_1^\alpha\, u_2^\beta) \qquad 0 \le u_1, u_2 \le 1$$

$\alpha \in [0,1]$.

Sei $U_1 = \max\{V_1^{1/\alpha}\, \tilde{U}_1^{1/1-\alpha}\}$ $U_2 = \max\{V_2^{1/\beta}\, \tilde{U}_2^{1/1-\beta}\}$

Wobei $V_1\ V_2$ ein ZVektor mit Vert.fkt. C_θ und $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \sim U[0,1]$ untereinander unabh. und auch von $V_1\ V_2$ unabh.

z.z. • $C_{\theta,\alpha,\beta}$ Vert. fkt. von $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$

und • $C_{\theta,\alpha,\beta}$ Copula

$$P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) = P(\max\{V_1^{1/\alpha}\, \tilde{U}_1^{1/1-\alpha}\} \le u_1,$$
$$\max\{V_2^{1/\beta}, \tilde{U}_2^{1/1-\beta}\} \le u_2) =$$

$$= P(V_1^{1/\alpha} \le u_1\ \tilde{U}_1^{1/1-\alpha} \le u_1,\ V_2^{1/\beta} \le u_2,\ \tilde{U}_2^{1/1-\beta} \le u_2\}$$

$$= P(V_1^{1/\alpha} \le u_1, V_2^{1/\beta} \le u_2)\ P(\tilde{U}_1^{1/1-\alpha} \le u_1)\ P(\tilde{U}_2^{1/1-\beta} \le u_2)$$

aufgrund der Unabhängigkeiten

$$= P(V_1 \le u_1^\alpha\ V_2 \le u_2^\beta)\ P(\tilde{U}_1 \le u_1^{1-\alpha})\ P(\tilde{U}_2 \le u_2^{1-\beta})$$

$$= C_\theta(u_1^\alpha\, u_2^\beta)\ u_1^{1-\alpha}\, u_2^{1-\beta} = C_{\theta,\alpha,\beta}(u_1\ u_2)$$

D.h. $P(U_1 \le u_1\ U_2 \le u_2) = C_{\theta,\alpha,\beta}(u_1\ u_2)$
und somit $C_{\theta,\alpha,\beta}$ ist die Vert. fkt von (U_1, U_2)

Wir zeigen noch

(U_1, U_2) nimmt seine Werte in $[0,1]^2$ an

und $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}[0,1]$. Dann folgt, dass $C_{\theta,\alpha\beta}$ Copula (per Definition)

$U_1 = \max\{V_1^{1/\alpha}, \tilde{U}_1^{1/1-\alpha}\} \in [0,1]$ weil $V_1 \in [0,1]$

$V_1^{1/\alpha} \in [0,1]$ Weil $\alpha \in [0,1]$

$\tilde{U}_1 \in [0,1]$ $\frac{1}{1-\alpha} \cancel{\geq} 0 \Rightarrow \tilde{U}_1^{1/1-\alpha} \in [0,$

Analog $U_2 = \max\{V_2^{1/\beta}, \tilde{U}_2^{1/1-\beta}\} \in [0,1]$

Weiters $P(U_1 \leq u) = P(\max\{V_1^{1/\alpha}, \tilde{U}_1^{1/1-\alpha}\} \leq u)$

$= P(V_1^{1/\alpha} \leq u, \tilde{U}_1^{1/1-\alpha} \leq u)$

$= P(V_1 \leq u^\alpha) P(\tilde{U}_1 \leq u^{1-\alpha}) = u^\alpha \cdot u^{1-\alpha} = u$

$U_1 \overset{\mathcal{U}}{\sim} \mathcal{U}[0,1]$

Analog $U_2 \sim \mathcal{U}[0,1]$

- Unabh. Copula $C(u_1 u_2) = u_1 \cdot u_2 = u_1^{1-0} u_2^{1-0} C_\theta(u_1^0, u_2^0)$

$= u_1 u_2 C_\theta(1,1) = u_1 u_2$

ist Element der drei-parametrigen Familie

$C_\theta(u_1 u_2) = u_1^{1-1} u_2^{1-1} C_\theta(u_1^1 u_2^1) = 1 \cdot 1\, C_\theta(u_1 u_2)$

ist Element der drei-parametrigen Familie

$C_{\theta,\alpha,\beta}$ ist i.a. nicht Vertauschbar, d.h. für $\alpha \neq \beta$ nicht vertauschbar (Werte für $u_1 u_2$ einsetzen etwa $u_2 = 2u_1$ und $C_{\theta,\alpha,\beta}(u_1 u_2)$ mit $C_{\theta,\alpha,\beta}(u_2 u_1)$ vergleichen)