

Ein nicht-parametrisches Bootstrapping Verfahren zu Ermittlung von Konfidenzintervallen der Schätzer

Seien die ZV X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Stichprobe daraus.

Gesucht: Ein Schätzer eines von F abhängigen Parameters θ , z.B. $\theta = q_\alpha(F)$, und das dazugehörige Konfidenzintervall.

Sei $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ein Schätzer von θ , zB. $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = x_{[(n(1-\alpha)]+1, n}$, wobei $x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n}$ die sortierte Stichprobe ist.

Das gesuchte Konfidenzintervall ist ein (a, b) ,
 $a = a(x_1, \dots, x_n)$ u. $b = b(x_1, \dots, x_n)$, sodass $P(a < \theta < b) = p$,
für ein vorgegebenes Konfidenzniveau p .

Fall I: F ist bekannt.

Durch Simulation von F werden N Stichproben (N groß)
 $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, erzeugt.

Sei $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)})$, $1 \leq i \leq N$.

Empirische Verteilungsfunktion von $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$F_N^{\hat{\theta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\tilde{\theta}_i, \infty)} \rightarrow F^{\hat{\theta}} \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Das gesuchte Konf.intervall: $\left(q_{\frac{1-p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}), q_{\frac{1+p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}) \right)$ (vorausgesetzt die Stichprobengößen N und n sind groß genug).

Fall II: F ist unbekannt \Rightarrow Bootstrapping!

Empirische Verteilungsfunktion von X_i , $1 \leq i \leq n$, ist:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[x_i, \infty)}(x).$$

n groß $\implies F_n \approx F$.

Wir können Stichproben aus F_n nehmen in dem wir (n) Elemente aus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mit Zurücklegung ziehen.

Angenommen es werden N solche Stichproben gezogen:

$$x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}, 1 \leq i \leq N.$$

Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.

Die empirische Verteilungsfunktion $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\theta_i^*, \infty)}(x)$

approximiert die Verteilungsfunktion $F^{\hat{\theta}}$ von $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ für $N \rightarrow \infty$.

Konfidenzintervall (a, b) : $a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*})$, $b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*})$.

D.h. $a = \theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*$, $b = \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^*$,

wobei $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \geq \theta_{N, N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht.

Zusammenfassung des nicht-parametrischen Bootstrap Verfahrens zur Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben: Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der i.i.d. ZV. X_1, X_2, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F und ein Schätzer $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eines unbekannt Parameters $\theta(F)$.

Gesucht: Ein Konfidenzintervall I_p für θ mit vorgegebenem Konfidenzniveau p .

- Bilde N neue Stichproben $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$, durch Ziehung mit Zurücklegung aus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.
- $I_p = \left(\theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*, \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^* \right)$, wobei $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \theta_{N, N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht

Eine approximative Lösung ohne Bootstrap

Gegeben: Eine Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n von ZV X_i , $1 \leq i \leq n$, i.i.d. mit unbekannter kontinuierlicher Verteilungsfunktion F .

Gesucht: Ein Konfidenzintervall (a, b) für $q_\alpha(F)$, $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b = b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sodass

$$P(a < q_\alpha(F) < b) = p \text{ und } P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1 - p)/2$$

Wir suchen $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, und das kleinste $p' > p$, sodass

$$P(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}) = p' \quad (*) \quad \text{und}$$

$$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 \text{ und } P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 (**),$$

wobei $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$ durch Sortierung von x_1, x_2, \dots, x_n entsteht.

Sei $Y_\alpha = \#\{x_k : x_k > q_\alpha(F)\}$

Es gilt: $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \approx P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j - 1)$
 $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \approx P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i - 1)$

$Y_\alpha \sim \text{Bin}(n, 1 - \alpha)$ da $\text{Prob}(x_k \geq q_\alpha(F)) = 1 - \alpha$ für einen beliebigen Punkt x_k aus der Stichprobe.

Berechne $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$ und $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$ für unterschiedliche i und j solange bis $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i > j$, gefunden werden, die (*) und (**) erfüllen.

Historische Simulation

Seien x_{m-n+1}, \dots, x_m historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren X_{m-n+1}, \dots, X_m .

Annahme: Die historischen Verluste sind i.i.d.

Die historischen Verlustwerte $l_k = l_{[m]}(x_{m-k+1})$, $k = 1, 2, \dots, n$, stellen eine Stichprobe der Verlustverteilung dar.

Empirischer VaR: $\widehat{VaR} = q_\alpha(\widehat{F}_n^L) = l_{[n(1-\alpha)]+1, n}$

Empirischer CVaR: $\widehat{CVaR} = \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]+1} l_{i, n}}{[n(1-\alpha)]+1}$,

wobei $l_{1, n} \geq l_{2, n} \geq \dots \geq l_{n, n}$ durch die Sortierung von l_i , $1 \leq i \leq n$, entsteht.

VaR und CVaR des aggregierten Verlustes über mehrere Tage, zB. 10 Tage, kann mit Hilfe der Verlustwerte

$$l_k^{(10)} = l_{[m]} \left(\sum_{j=1}^{10} x_{m-n+10(k-1)+j} \right) \quad k = 1, \dots, [n/10]$$

geschätzt werden.

Historische Simulation - Folgerung

Vorteile:

- einfache Implementierung
- berücksichtigt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Komponenten des Vektors der Veränderungen der Risikofaktoren $X_{m-k} = (X_{m-k,1}, \dots, X_{m-k,d})$.

Nachteile:

- sehr viele historische Daten notwendig um zuverlässige Schätzer zu bekommen
- Schätzung impliziert, dass der geschätzte Verlust nicht größer als bereits historisch realisierte Verluste sein kann.

Varianz-Kovarianz Methode

Grundidee: Verwendung der linearisierten Verlustfunktion.

$$L_{m+1}^\Delta = l_m^\Delta(X_{m+1}) = -V \sum_{i=1}^d w_i X_{m+1,i} = -V w^T X_{m+1}$$

wobei $V := V_m$, $w_i := w_{m,i}$, $w = (w_1, \dots, w_d)^T$,
 $X_{m+1} = (X_{m+1,1}, X_{m+1,2}, \dots, X_{m+1,d})^T$.

Annahme: $X_{m+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$

Daraus folgt: $-V w^T X_{m+1} \sim N(-V w^T \mu, V^2 w^T \Sigma w)$

Seien x_{m-n+1}, \dots, x_m historische Beobachtung der Veränderungen der Risikofaktoren.

Annahme: x_{m-n+1}, \dots, x_m sind i.i.d.

Schätzer für μ_i : $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{m-k+1,i}$, $i = 1, 2, \dots, d$

Schätzer $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$ für $\Sigma = (\sigma_{ij})$:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{m-k+1,i} - \mu_i)(x_{m-k+1,j} - \mu_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, d$$

Schätzer für VaR: $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = -V w^T \hat{\mu} + V \sqrt{w^T \hat{\Sigma} w} \phi^{-1}(\alpha)$ (siehe Bsp. (8)).

Varianz-Kovarianz Methode - Folgerung

Vorteile:

- analytische Lösung
- einfache Implementierung
- keine Simulationen notwendig

Nachteile:

- Linearisierung nicht immer adäquat, nur für einen kurzen Zeithorizont gerechtfertigt (siehe Übung (2)).
- Annahme der Normalverteilung könnte zur Unterschätzung des Risikos führen und sollte begründet werden (zB. anhand von historischen Daten).

Monte-Carlo Verfahren

- (1) Historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren X_{m-n+1}, \dots, X_m .
- (2) Annahme über ein parametrisches Modell für die Verteilungsfunktion der X_k , $m - n + 1 \leq k \leq m$;
zB. gemeinsame Verteilungsfunktion F und Unabhängigkeit.
- (3) Schätzung der Parameter von F .
- (4) Erzeugung von N Stichproben $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ aus F ($N \gg 1$).
Berechnung der Verlustwerte $l_k = l_{[m]}(\tilde{x}_k)$, $1 \leq k \leq N$
- (5) Ermittlung der empirischen Verteilungsfunktion der Verlustfunktion L_{m+1} :

$$\hat{F}_N^{L_{m+1}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{[l_k, \infty)}(x).$$

- (5) Ermittlung der Schätzer für VaR und CVAR der Verlustfunktion:

$$\widehat{VaR}(L_{m+1}) = q_\alpha(\hat{F}_N^{L_{m+1}}) = l_{[N(1-\alpha)]+1, N}$$

$$\widehat{CVaR}(L_{m+1}) = \frac{\sum_{k=1}^{[N(1-\alpha)]+1} l_{k,N}}{[N(1-\alpha)] + 1}$$

wobei die Verlustwerte sortiert werden:

$$l_{1,N} \geq l_{2,N} \geq \dots \geq l_{N,N}.$$

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Vorteile:

- Sehr flexibel; für F kann jedes Modell verwendet werden, aus dem simuliert werden kann
- Berücksichtigung von zeitlichen Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen der Risikofaktoren möglich etwa durch Verwendung von Zeitreihen

Nachteile:

- Rechenintensiv; große Anzahl von Simulationen notwendig um gute Schätzwerte zu bekommen.

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Beispiel 11 *PF besteht aus ein Stück der Aktie S mit Preis= S_t zum Zeitpunkt t . Die Veränderungen der Risikofaktoren*

$$X_{k+1} = \ln(S_{t_{k+1}}) - \ln(S_{t_k}),$$

sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion F_θ , wobei θ ein unbekannter Parameter ist.

θ kann mit Hilfe von historischen Daten geschätzt werden (zB. ML Verfahren)

Sei der heutige Preis $S_{t_k} = S$

Wir zeigen: VaR des PF über $[t_k, t_{k+1}]$ ist folgendermaßen gegeben

$$VaR_\alpha(L_{t_{k+1}}) = S(1 - \exp\{F_\theta^\leftarrow(1 - \alpha)\}).$$

Wenn F_θ kompliziert, dann kann die analytische Berechnung von CVaR schwierig sein. Alternative: Monte-Carlo Simulation.

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Beispiel 12 Sei das PF und die Veränderungen der Risikofaktoren X_{k+1} wie im obigen Beispiel.

Ein populäres Modell für die log. Rendite einer Aktie: GARCH(1,1)
(siehe zB. Alexander 2002):

$$X_{k+1} = \sigma_{k+1} Z_{k+1} \quad (1)$$

$$\sigma_{k+1}^2 = a_0 + a_1 X_k^2 + b_1 \sigma_k^2 \quad (2)$$

wobei $Z_k, k \in \mathbb{N}$, sind i.i.d. und standard normalverteilt a_0, a_1 und b_1 sind Parameter, die geschätzt werden.

Es ist einfach aus diesem Modell zu simulieren.

Analytische Berechnung der VaR bzw. CVaR für ein Zeitintervall bestehend aus mehreren Perioden sind hingegen schwierig!
Ausprobieren!

3. Kapitel: Extremwerttheorie

Notation:

- Wir verwenden oft dieselbe Notation für die Verteilung einer ZV und ihre Verteilungsfunktion!
- $f(x) \sim g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ bedeutet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$
- $\bar{F} := 1 - F$ (*rechter Rand* “*right Tail*” einer univariaten Verteilungsfunktion F).

Bezeichnungskonvention: Man sagt eine ZV X hat “fat Tails” oder ist “heavy tailed” (h.t.) wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty, \forall \lambda > 0$.

Auch eine ZV X für die $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $E(X^k) = \infty$, wird oft *heavy tailed* genannt.

Reguläre Variation

Definition 9 Eine messbare Funktion $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ besitzt eine reguläre Variation mit Index $\rho \in \mathbb{R}$ um $+\infty$ wenn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho, \quad \forall x > 0 \quad (3)$$

Bezeichnung: $h \in RV_\rho$.

Wenn $\rho = 0$, dann heißt es „ h variiert langsam um ∞ “.

Wenn $h \in RV_\rho$ dann $h(x)/x^\rho \in RV_0$.

Falls $h \in RV_\rho$, dann $\exists L \in RV_0$ sodass $h(x) = L(x)x^\rho$ ($L(x) = h(x)/x^\rho$).

Falls $\rho < 0$, dann ist die Konvergenz in (3) gleichmäßig in jedem Intervall $(b, +\infty)$ für $b > 0$.

Beispiel 13 Zeigen Sie, dass für die untenstehenden Funktionen L , $L \in RV_0$ gilt.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = c \in (0, +\infty)$

(b) $L(x) = \ln(1 + x)$

(c) $L(x) = \ln(1 + \ln(1 + x))$

Beispiel 14 Gilt es $f \in RV_0$ für $f(x) = 3 + \sin x$, $f(x) = \ln(e + x) + \sin x$?

Eine Funktion $L \in RV_0$ kann unendlich stark variieren um $+\infty$:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0 \text{ and } \limsup_{x \rightarrow \infty} L(x) = \infty$$

Ein Beispiel dafür ist $L(x) = \exp\{(\ln(1 + x))^2 \cos((\ln(1 + x))^{1/2})\}$.

Definition 10 Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfunktion F . Man sagt „ X besitzt eine reguläre Variation um $+\infty$ “, wenn $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.

Beispiel 15 Pareto Verteilung: Sei $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, für $x > 1$ und $\alpha > 0$. Dann gilt $\bar{F}(tx)/\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$ für $t > 0$. D.h. $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.

Beispiel 16 Fréchet-Verteilung: Sei $F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$ für $x > 1$ und $\alpha > 0$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/x^{-\alpha} = 1$. Daraus folgt $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.

Proposition 1 (ohne Beweis)

Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfnk. F , sodass $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$. Es gilt dann $E(X^\beta) < \infty$ für $\beta < \alpha$ und $E(X^\beta) = \infty$ für $\beta > \alpha$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Beispiel 17 Seien X_1 und X_2 zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion $F, \bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.

Annahmen:

- X_1 (X_2) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie A_1 (A_2) an.
- Die Preise von A_1 und A_2 identisch und deren logarithmierten Rendite i.i.d. sind.

Ein Investor hat 2 Stück der Aktie A_1 gekauft. Kann der Investor die Verlustwahrscheinlichkeit verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie A_1 und einem Stück der Aktie A_2 wechselt?

Beispiel 18 Seien $X, Y \geq 0$ zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (zB. Brand- bzw. Autoversicherung).

Annahmen:

- $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, für ein $\alpha > 0$, wobei F Verteilungsfunktion von X ist.
- $E(Y^k) < \infty, \forall k > 0$.

Die Versicherungsgesellschaft möchte $\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | X + Y > x)$ ermitteln.