

Theorem 19 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Korollar 2 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula C_ρ^{Ga} , wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Theorem 20 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein t -verteilter Zufallsvektor mit ν Freiheitsgraden, Mittelwert 0 und linearer Korrelationsmatrix R : $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. Für $R_{12} > -1$ gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 19. Hinweis:

$$X_2|X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.

Korollar 3 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer t -copula $C_{\nu, R}^t$ mit ν Freiheitsgraden und einer Korrelationsmatrix R . Dann gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right)$$

Theorem 21 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen copula C_ρ^{Ga} , wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho \quad \text{und} \quad \rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

Korollar 4 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer elliptischen copula $C_{\mu, \Sigma, \psi}^E$. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin R_{12}, \quad \text{wobei} \quad R_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$$

Theorem 22 Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ ein elliptisch verteilter Vektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin R_{ij}, \quad \text{wobei} \quad R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, d$$

Beweise von Satz 21, Satz 22 und Korollar 4: siehe McNeil et al. (2005).

Archimedische Copulas

Nachteile elliptischer Copulas:

- I.A. keine Darstellung in geschlossener Form möglich
- radial-symmetrisch

Bivariate Archimedische Copulas

Definition 22 Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ stetig, streng monoton fallend, sodass $\phi(1) = 0$. Die pseudo-inverse Funktion $\phi^{[-1]}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ von ϕ wird folgendermassen definiert:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$\phi^{[-1]}$ ist stetig und monoton fallend in $[0, \infty]$, streng monoton fallend in $[0, \phi(0)]$ und es gilt:

$$\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u \text{ für } u \in [0, 1]$$

$$\phi(\phi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0) & \phi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Theorem 23 Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ stetig, streng monoton fallend in $[0, 1]$, sodass $\phi(1) = 0$, und sei $\phi^{[-1]}$ die pseudo-inverse Funktion von ϕ . Sei $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, sodass $C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$. C ist eine Copula dann und nur dann wenn ϕ convex ist. Copula dieser Form heißen Archimedische Copulas. ϕ heißt Generator von C . Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ und $C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$.

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 16 Gumbel Copulas

Sei $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$, $t \in [0, 1]$.

$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right)$ ist die Gumbel

Copula mit Parameter θ .

Für $\theta = 1$: $C_1^{Gu} = u_1 u_2$.

$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Gu} = M(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}$.

Die Gumbel Copulas haben eine obere Tail Abhängigkeit.

Beispiel 17 Clayton Copulas

Sei $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.

$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$ ist die Clayton Copula mit Parameter θ .

$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{Cl} = u_1 u_2$ und $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Cl} = M = \min\{u_1, u_2\}$.

Die Clayton Copulas haben eine untere Tail Abhängigkeit

Beispiel 18 $\phi(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$. $\phi^{[-1]}(t) = \max\{1 - t, 0\}$.
 $C_\phi(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$.

D.h. die untere Fréchet Schranke ist eine Archimedische Copula.

Theorem 24 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Archimedischen Copula C generiert von ϕ .
Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$.

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 19 *Kendalls Tau für Gumbel und Clayton Copulas*

Gumbel Copulas: $\phi(t) = (\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$.
 $\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Clayton Copulas: $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.
 $\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = \frac{\theta}{\theta+2}$.

Multivariate Archimedische Copulas

Definition 23 Eine Funktion $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ heißt vollständig monoton wenn alle höheren Ableitungen von g existieren und folgende Ungleichungen gelten für $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$(-1)^k \left(\frac{d^k}{ds^k} g(s) \right) \Big|_{s=t} \geq 0, \forall t \in (0, \infty)$$

Theorem 25 (Kimberling 1974)

Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion, sodass $\phi(0) = \infty$ und $\phi(1) = 0$. Die Funktion $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, $C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_d))$ ist eine Copula für $d \geq 2$ dann und nur dann wenn ϕ^{-1} vollständig monoton in $[0, \infty)$ ist.

Lemma 6 Eine Funktion $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist die Laplace-Stieltjes Transformation einer Verteilungsfunktion G in $[0, \infty)$ ($\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $s \geq 0$) dann und nur dann, wenn ψ vollständig monoton und $\psi(0) = 1$ gilt.

Theorem 26 Sei G eine Verteilungsfunktion in $[0, \infty)$, sodass $G(0) = 0$ und sei ψ die Laplace-Stieltjes Transformation von G

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x), \text{ für } s \geq 0.$$

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion G und seien U_1, U_2, \dots, U_d bedingt unabhängige Zufallsvariablen in $[0, 1]$ für ein gegebenes $X = x$ mit folgender bedingter Verteilungsfunktion:

$$F_{U_k|X=x}(u) = \exp(-x\psi^{-1}(u)) \text{ für } u \in [0, 1].$$

Es gilt dann

$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \dots + \psi^{-1}(u_d)).$
und die Verteilungsfunktion von $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ ist eine Archimedische Copula mit Generator ψ^{-1} .

Vorteile und Nachteile Archimedischer Copulas:

- Modellierung einer breiteren Klasse von Abhängigkeitsstrukturen
- Darstellung in geschlossener Form möglich
- Wenige freie Parameter vorhanden
- Technische Voraussetzungen für die Generator-Funktionen multivariater Archimedische Copulas.

Simulation von Gauss'schen Copulas und t-Copulas

Sei $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Sei $AA^T = R$ die Cholesky Zerlegung von R ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$). Falls $Z_1, Z_2, \dots, Z_d \sim N(0, 1)$ unabhängig dann gilt $\mu + AZ \sim N_d(\mu, R)$.

Algorithmus 1 zur Erzeugung eines Zufallsvektors

$U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Copula C_R^{Ga} ist.

- Berechne die Cholesly Zerlegung A von R : $R = AA^T$.
- Simuliere d unabhängige standard normal verteilte ZV $Z_1, Z_2, \dots, Z_d \sim N(0, 1)$
- Setze $X = AZ$
- Setze $U_k = \Phi(X_k)$ für $k = 1, 2, \dots, d$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der standard Normalverteilung ist.
- $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ hat Verteilungsfunktion C_R^{Ga} .

Algorithmus 2 zur Erzeugung eines Zufallsvektors

$U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Copula $C_{\nu, R}^t$ ist.

- Berechne die Cholesky Zerlegung A von R : $R = AA^T$.
- Simuliere d unabhängige standard normal verteilte ZV $Z_1, Z_2, \dots, Z_d \sim N(0, 1)$
- Simuliere eine ZV $S \sim \chi_{\nu}^2$ unabhängig von Z_1, \dots, Z_d .
- Setze $Y = AZ$
- Setze $X = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Y$
- Setze $U_k = t_{\nu}(X_k)$ für $k = 1, 2, \dots, d$, wobei t_{ν} die Verteilungsfunktion einer standard t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden ist.
- $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ hat Verteilungsfunktion $C_{\nu, R}^t$.

Simulationen der Gumbel und Clayton Copulas

Aus Satz 26 lässt sich ein generischer Algorithmus zur Erzeugung archimedischer Copulas konstruieren.

Algorithmus 3 zur Erzeugung eines Zufallsvektors

$U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Archimedische Copula $C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_d))$ mit Generator ϕ ist.

- *Simuliere eine Variable X mit Verteilungsfunktion G , sodass die Laplace-Stieltjes Transformation ψ von G die inverse Funktion des Generators der gesuchten Copula ist, $\psi = \phi^{-1}$.*
- *Simuliere unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen V_1, V_2, \dots, V_d in $[0, 1]$.*
- *Setze $U = (\psi(-\ln(V_1)/X), \psi(-\ln(V_2)/X), \dots, \psi(-\ln(V_d)/X))$. U hat Verteilungsfunktion $C(u)$.*

Der Generator $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$ erzeugt die Clayton Copula C_θ^{Cl} . Aber auch $\tilde{\phi}(t) = t^{-\theta} - 1$ ist ein Generator der Clayton Copula.

Für $X \sim \text{Gamma}(1/\theta, 1)$ d.h. $f_X(x) = x^{1/\theta-1}e^{-x}/\Gamma(1/\theta)$ gilt:

$$E(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{\Gamma(1/\theta)} x^{1/\theta-1} e^{-x} dx = (s+1)^{-1/\theta} = \tilde{\phi}^{-1}(s).$$

Algorithmus 4 zur Erzeugung eines Zufallsvektors

$U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Clayton Copula C_θ^{Cl} ist.

- Simuliere $X \sim \text{Gamma}(1/\theta, 1)$.
- Simuliere unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen V_1, V_2, \dots, V_d in $[0, 1]$.
- die Verteilungsfunktion des Vektors

$$U = (\psi(-\ln(V_1)/X), \psi(-\ln(V_2)/X), \dots, \psi(-\ln(V_d)/X))$$

ist die Clayton Copula C_θ^{Cl} .

Die Simulation von Gumbel Copulas C_θ^{Gu} :

Sei X eine positive stabile ZV, $X \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$
mit $\gamma = (\cos(\pi/(2\theta)))^\theta$, $\theta > 1$.

Die Laplace-Stieltjes Transformation von F_X ist $\phi(t) = \exp(-t^{1/\theta})$.

Simulation von $Z \sim ST(\alpha, \beta, 1, 0)$: siehe Nolan 2002.

Für $\gamma \neq 1$ gilt: $X = \delta + \gamma Z \sim St(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Alternativer Ansatz:

Sei $\theta \geq 1$ und $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp(-x^{1/\theta})$ für $x \geq 0$.

Sei $V \sim U(0, 1)$.

Sei S eine von V unabhängige ZV. mit Dichtefunktion

$$h(s) = (1 - 1/\theta + s/\theta) \exp(-s)$$

Sei $(Z_1, Z_2)^T = (VS^\theta, (1 - V)S^\theta)$.

Die Verteilungsfunktion von $(\bar{F}(Z_1), \bar{F}(Z_2))^T$ ist C_θ^{Gu} .

Überzeugen Sie sich (Hausübung)!

Algorithmus 5 zur Erzeugung eines Zufallsvektors

$U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Gumbel Copula C_θ^{Cu} ist.

- Simuliere zwei unabhängige ZV. $V_1, V_2 \sim U(0, 1)$.
- Simuliere zwei unabhängige ZV. $W_1 \sim \Gamma(1, 1)$, $W_2 \sim \Gamma(2, 1)$
- Setze $S = I_{V_2 \leq 1/\theta} W_1 + I_{V_2 > 1/\theta} W_2$.
- Setze $(Z_1, Z_2) = (V_1 S^\theta, (1 - V_1) S^\theta)$.
- Die Verteilungsfunktion von $U = \left(\exp(-Z_1^{1/\theta}), \exp(-Z_2^{1/\theta}) \right)^T$ ist C_θ^{Cu} .

Schätzung von Copulas

Gegeben sei ein Satz multi-dimensionaler Daten. Gesucht ist eine Copula und die Randverteilungen die diesem Datensatz am besten entsprechen.

1. Frage: Welche Familie von (bekannten) Copulas eignet sich am besten?

Antwort: Visueller Vergleich der graphischen Darstellungen von Daten bzw. bekannten Copulas, Berechnung der empirischen Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit und Auswahl von dazu passenden Copula Familien.

2. Frage: Schätzung der Parameter einer vorselektierten Copula Familie.

Gegeben: Eine Stichprobe $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ aus einer Gesamtverteilung F mit stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d .

Gesucht: Ein Schätzer $\hat{\theta}$ des Parameter-Vektors θ der eindeutigen Copula C_θ , für die $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ gilt.

Die Schätzer $\hat{\theta}$ für C_R^{Ga} , $C_{\nu,R}^t$, C_θ^{Cl} und C_θ^{Gu}

$$C_R^{Ga} = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)) \quad R_{ij} = \sin(\pi(\rho_\tau)_{ij}/2)$$

$$C_{\nu,R}^t = t_{\nu,R}^d(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)) \quad R_{ij} = \sin(\pi(\rho_\tau)_{ij}/2)$$

$$C_\theta^{Gu}(u) = \exp(-[(-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_d)^\theta]^{1/\theta}) \quad \theta = 1/(1 - (\rho_\tau)_{ij}) \quad ,$$

$$C_\theta^{Cl}(u) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-1/\theta} \quad \theta = 2(\rho_\tau)_{ij}/(1 - (\rho_\tau)_{ij})$$

wobei

$$\begin{aligned} (\rho_\tau)_{ij} &= \rho_\tau(X_{k,i}, X_{k,j}) \\ &= P((X_{k,i} - X_{l,i})(X_{k,j} - X_{l,j}) > 0) - P((X_{k,i} - X_{l,i})(X_{k,j} - X_{l,j}) < 0) \\ &= E(\text{sign}((X_{k,i} - X_{l,i})(X_{k,j} - X_{l,j}))). \end{aligned}$$

Standard Schätzer für Kendalls Tau:

$$\hat{\rho}_{\tau ij} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{sign}((X_{k,i} - X_{l,i})(X_{k,j} - X_{l,j})).$$

Schätzung von Gauss'schen Copulas und t -Copulas

Es kann passieren, dass $\hat{R} = (\hat{R}_{ij})$ nicht positive definit ist, wobei

$$\hat{R}_{ij} = \sin(\pi \hat{\rho}_{\tau_{ij}}/2).$$

\hat{R} wird durch eine Korrelationsmatrix R^* ersetzt, wobei R^* "unweit" von \hat{R} liegt.

Algorithmus 6 (Eigenwert-Ansatz, siehe Rousseeuw und Molenberghs 1993)

- Berechne die Spektralzerlegung $\hat{R} = \Gamma \Lambda \Gamma^T$ von \hat{R} , wobei Λ eine Diagonalmatrix ist, die die Eigenwerte von \hat{R} enthält, und Γ eine orthogonale Matrix deren Spalten den Eigenvektoren von \hat{R} entsprechen.
- Ersetze die negativen Eigenwerte in λ durch eine kleine Zahl $\delta > 0$ um $\tilde{\Lambda}$ zu erhalten.
- Berechne $\tilde{R} = \Gamma \tilde{\Lambda} \Gamma^T$. \tilde{R} ist symmetrisch und positive definit aber nicht unbedingt eine Korrelationsmatrix, weil die Diagonalelemente \hat{R}_{ii} ungleich 1 sein könnten.
- Setze $\hat{R} = D \tilde{R} D$ wobei D eine diagonale Matrix mit $D_{k,k} = 1/\sqrt{\tilde{R}_{k,k}}$ ist.

t -Copulas: Schätzung des Parameters ν der Freiheitsgrade

1. Schätzung der univariaten Randverteilungsfunktionen F_1, F_2, \dots, F_d . Seien $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_d$ die dazugehörigen Schätzer.
2. Bildung einer Pseudo-Stichprobe der Copula:

$$\hat{U}_k = (\hat{U}_{k,1}, \hat{U}_{k,2}, \dots, \hat{U}_{k,d}) := (\hat{F}_1(X_{k,1}), \dots, \hat{F}_d(X_{k,d})),$$

für $k = 1, 2, \dots, n$ (siehe Genest und Rivest 1993).

\hat{F}_k kann folgendermaßen erzeugt werden:

- Parametrische Schätzung: \hat{F}_k ist eine parametrische Verteilungsfunktion wobei der Parameter zB. mit einem Maximum Likelihood (ML) Ansatz geschätzt wird.
- Nicht Parametrische Schätzung: \hat{F}_i ist die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_i(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{t=1}^n I_{X_{t,i} \leq x}$, $1 \leq i \leq d$.

ML-Schätzung von ν : $\nu = \arg \max_{\xi} \ln L(\xi; \hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n)$ wobei

$$L(\xi; \hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n) = \prod_{k=1}^n c_{\xi, R}^t(\hat{U}_k)$$

und $c_{\xi, R}^t$ die Dichte der t -Copula $C_{\xi, R}^t$ ist.

Daraus folgt

$$\ln L(\xi; \hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n) = \sum_{k=1}^n \ln g_{\xi, R}(t_{\xi}^{-1}(\hat{U}_{k,1}), \dots, t_{\xi}^{-1}(\hat{U}_{k,d})) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \ln g_{\xi}(t_{\xi}^{-1}(\hat{U}_{k,j})),$$

wobei $g_{\xi, R}$ die Gesamtdichte einer standard d -dimensionalen t -Verteilung mit Verteilungsfunktion $t_{\xi, R}^d$ ist,

und

g_{ξ} die Dichte einer univariaten standard t -Verteilung mit ξ Freiheitsgraden ist.