Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B)
Institut für Mathematische Strukturtheorie (Math C)

Proseminar Bakkalaureat TM 502.549 - WS 2011/2012 Optimierung, Graphentheorie und Stochastik

Dr. Eranda Dragoti-Çela und Dr. Franz Lehner

Pflichtfach (aus Wahlkatalog von Proseminaren) im 3. Semester, Bachelorstudium Technische Mathematik

Themenliste:

1. **Median-Probleme in Netzwerken:** Definition, Anwendungen, Algorithmen.

   Sei $G = (V, E, c, w)$ ein zusammenhängendes Netzwerk mit Knotenmenge V, Kantenmenge E, Kantenlängenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}^+$ und Knotengewichtsfunktion $w\colon V \to \mathbb{R}^+$. Das klassische p-Median-Problem besteht darin, p Standorte auf den Kanten bzw. Knoten des Netzwerks so zu bestimmen, dass die gewichtete Summe der Abstände der Knoten von dem jeweils am nächsten liegenden Standort minimiert wird. Es gibt unzählige Anwendungen des p-Median-Problems und dessen Verallgemeinerungen. ZB., wenn p Lagerhäuser/Produktionsstätte eingerichtet werden sollen, sodass die Kunden, die an den Knoten $v \in V$ des Straßennetzwerks G platziert sind, optimal bedient werden. Hierbei stellt $w(v)$ den Bedarf von Kunde v dar.

   Das p-Median-Problem ist im Allgemeinen schwierig; es gehört zur Klasse der NP-schweren Problemen selbst für den Fall, wenn der dem Netzwerk unterliegende Graph einen maximalen Knotengrad von 3 hat. Falls dieser Graph aber ein Baum ist, dann ist das p-Median-Problem effizient lösbar.

   Siehe Wikipedia (Englisch), Daskin [6], S. 198–208.

2. **Center-Probleme in Netzwerken**: Definition, Anwendungen, Algorithmen.

   Sei $G = (V, E, c, w)$ ein zusammenhängendes Netzwerk mit Knotenmenge V, Kantenmenge E, Kantenlängenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}^+$ und Knotengewichtsfunktion $w\colon V \to \mathbb{R}^+$. Das klassische p-Center-Problem besteht darin, p Standorte auf den Kanten bzw. Knoten des Netzwerks so zu bestimmen, dass das Maximum der gewichteten Abstände der Knoten von dem jeweils am nächsten liegenden Standort minimiert wird. Es gibt unzählige Anwendungen des p-Center-Problems und dessen Verallgemeinerungen. ZB. wenn es p Nothilfe-Einrichtungen (Spitäler, Feuerwehrhäuser) eingerichtet werden sollen, sodass die maximale Wartezeit der Kunden bis sie die Notfallhilfe erreicht, minimiert wird. Auch hier werden die Kunden mit den Knoten $v \in V$ des Straßennetzwerks G identifiziert. Die Gewichte w stellen, wenn vorhanden (können auch alle gleich Eins sein), ein Wichtigkeitsmaß der jeweiligen Kunden dar.

   Das p-Center-Problem ist im Allgemeinen schwierig; es gehört zur Klasse der NP-schweren Problemen. Falls der dem Netzwerk unterliegende Graph aber ein Baum (oder noch allgemeiner ein *Kaktus*) ist, dann ist das p-Median-Problem effizient lösbar.

   Siehe Wikipedia (Englisch), Daskin [6], S. 154-173.

3. **Orientierungen in Graphen**: Definition, Existenz und Algorithmen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter Graph. Gesucht ist eine Orientierung von G, d.h. eine Zuordnung, die jeder Kante $\{i, j\} \in E$ eine Richtung („von i nach j“) oder „von j nach i“) zuordnet, sodass in dem so orientierten

Graphen für jedes Knotenpaar (i, j) sowohl einen gerichteten Weg von i nach j als auch einen gerichteten Weg von j nach i gibt. Wenn G das Straßennetz einer Stadt darstellt, dann stellt eine Orientierung von G ein Einbahnstraßensystem dar, in dem von jedem Punkt aus jeder anderer Punkt erreicht werden kann ohne die Einbahnstraßenresktriktionen zu verletzen.

Siehe Wikipedia, McHugh [15], S. 150–166.

4. **Das Briefträgerproblem** („chinese postman problem“): Definition, Algorithmen, Anwendungen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter, gewichteter Graph in dem jeder Kante $\{i, j\} \in E$ ein Gewicht c_{ij} zugeordnet wurde. Gesucht ist eine geschlossene Kantenfolge mit minimaler Länge in der jede Kante mindestens einmal vorkommt.

   Siehe Wikipedia, Jungnickel [12], S. 418–422.

5. **Isomorphie von Graphen und Isomorphie von Bäumen**: Definitionen, Beispiele, Algorithmen.

   Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f : V \to V'$ gibt, so dass $\{x, y\} \in E$ dann und nur dann, wenn $\{f(x), f(y)\} \in E'$ gilt. So eine Funktion f heißt *Isomorphismus* der Graphen G und G'. Das Problem zu entscheiden, ob zwei gegebene Graphen isomorph sind ist im Allgemeinen schwierig, kein effizienter Algorithmus ist bekannt, d.h. keiner, der für alle Fälle schnell funktioniert. Für einige spezielle Klassen von Graphen gibt es jedoch effiziente Algorithme. Eine dieser Klassen sind die Bäume.

   Siehe Wikipedia, Matoušek und Nešetřil [13], Abschnitt 3.1 und Abschnitt 4.2.

6. **k-Zusammenhang in Graphen:** Definitionen, Satz von Menger und Charakteriesierungen im Fall von $k = 2$ und $k = 3$.

   Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-zusammenhängend* wenn $|V| > k$ und der Teilgraph $G - X$ von G zusammenhängend ist, $\forall X \subset V$ mit $|X| < k$. Hier bezeichnet $G - X$ jenen Teilgraphen, der durch die Entfernung der Knoten aus X und deren inzidierenden Kanten aus G entsteht. Äquivalent ist $G = (V, E)$ k-zusammenhängend, dann und nur dann, wenn je zwei Knoten $x, y \in V$ durch mindestens k knotendisjunkte Pfade in G verbunden sind. Die Äquivalenz dieser Definitionen kann mit Hilfe des Satzes von Menger begründet werden.

   Für kleine Werte von k, haben k-zusammenhängende Graphen eine relativ einfache und schöne Struktur, die es ermöglicht solche Graphen leicht zu konstruieren.

   Siehe Wikipedia, Diestel [7], S. 55–67.

7. **Unendliche Graphen**: Definitionen, Eigenschaften, das Königslemma und der Satz von Halin.

   Unendliche Graphen sind Graphen mit unendlichen Knoten- und Kantenmengen. Neben vielen Konzepte aus der (endlichen) Graphentheorie werden bei den unendlichen Graphen auch einige Konzepte benötigt, die jene Aspekte der unendlichen Graphen beschreiben, die in endlichen Graphen als solche nicht vorkommen, zB. die *Enden* der unendlichen Pfade. Es gibt zwei Erscheinungen der Unendlichkeit in zusammenhängenden Graphen: die unendliche „Länge“, die durch die Existenz der unendlichen Pfade dargestellt wird, und die unendliche „Breite“, die durch die Existenz vom Knoten unendlichen Grades dargestellt wird. Das Königslemma besagt im Wesentlichen, dass in jedem zusammenhängenden unendlichen Graphen eine dieser zwei Erscheinungen auftreten muss. Die „Kompaktifizierung“, eine der grundlegenden Beweistechniken in der Theorie der unendlichen Graphen, basiert auf das obengenannte Königslemma.

   Siehe Diestel [7], Abschnitte 8.1, 8.3 und 8.5.

8. **Baumzerlegung und Baumweite**: Definitionen, Beispiele, der Satz von Robertson und Seymour.

   Eine *Baumzerlegung* eines Graphen ist eine spezielle Abbildung der Knotenmenge des Graphen auf die Kontenmenge eines Baumes. Dieses Konzept wurde entwickelt mit dem Ziel, gewisse Probleme in Graphen als Probleme in den dazugehöprigen Baumzerlegungen zu formulieren, um diese dann effizient(er) lösen zu können. I.a. ist die Baumzerlegung eines Graphen nicht eindeutig. Die Weite einer Baumzerlegung wird als maximale Kardinalität über die Urbilder aller Baumknoten minus Eins definiert. In vielen Anwendungen wird eine Baumzerlegung mit minimaler Weite gesucht. Diese minimale Weite über alle Baumzerlegungen eines Graphen heißt *Baumweite* des Graphen. Die Baumweite eines Graphen ist ein Maß für die „ähnlichkeit“ des Graphen zu einem Baum. Viele Optimierunngsprobleme, die in beliebigen Graphen (NP-)schwer sind, lassen sich in Graphen mit beschränkter Baumweite effizient lösen.

   Siehe Wikipedia und Deistel [7], S. 315-325.

9. **Endliche Coxetergruppen**: Definition, einfache Beispiele.

   Eine (endliche) *Coxetergruppe* ist eine endliche, von Reflexionen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte Transformationsgruppe, z.B. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Polygons im $\mathbb{R}^2$. Coxetergruppen haben darüberhinaus schöne algebraische Eigenschaften. Es soll eine kleine Einführung anhand von Kaleidoskopen und Spiegelproblemen gegeben werden.

   Siehe Wikipedia, Goodman [9].

10. **Die schnellste Markovkette**.

    Eine Markovkette auf einem endlichen Graphen hat eine eindeutige stationäre Verteilung, gegen die die Markovkette konvergiert. Es soll die am schnellsten konvergierende Markovkette gefunden werden.

    Siehe Boyd/Diaconis/Sun/Xiao [4].

11. **Das Spaghettiproblem**.

    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim zufälligen Zerteilen einer Spaghetti (z.B. durch Fallenlassen) in drei Teile ein Dreieck herauskommt (d.h., jeder Teil ist kürzer als die beiden anderen zusammen)?

    Siehe Ionascu/Prajitura [10].

12. **Der Satz von Pick und Ehrhart-Polynome**.

    Der Satz von Pick sagt, daß die Fläche eines ebenen konvexen Polygons mit ganzzahligen Koordinaten durch einfaches Abzählen der ganzzahligen Punkte bestimmt werden kann. Darüberhinaus wird die Anzahl der ganzzahligen Punkte bei “Aufblasen” des Polygons durch ein Polynom beschrieben. Die Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen heißt *Ehrhart-Polynom*. Aufgabe ist es, einen Beweis des Satzes von Pick und ein paar Eigenschaften des Ehrhart-Polynoms zu präsentieren.

    Siehe Beck/Robins [1, Abschnitt 2.6,Kapitel 3].

13. **Hilberts drittes Problem** Wenn zwei ebene Polygonzüge gleicher Fläche gegeben sind, dann kann man einen von ihnen in endlich viele Polygonzüge zerschneiden und diese durch Drehen und Verschieben so zusammensetzen, daß der zweite Polygonzug herauskommt. (Satz von Bolyai-Gerwien). Schon 1844 fragten Bolyai und Gauß, ob es für diesen Satz eine Verallgemeinerung in höhere Dimensionen gibt, und die Frage kam als Problem Nummer drei auf Hilberts berühmte Liste von 1900. Die (komplizierte) negative Antwort kam 1902 von Dehn, hier soll ein elementarar einfacher Beweis vorgeführt werden.

    Siehe Benko [2].

14. **Der Vierzehnmengensatz von Kuratowski**.

    Ein Satz von Kuratowski besagt, daß die Anzahl der Mengen, die man aus einer beliebigen Teilmenge der reellen Zahlen durch Bilden von Abschlüßen und Komplementen erhalten kann, durch 14 (scharf) begrenzt ist.

    Siehe Sherman [17].

15. **Die Formel von Faà di Bruno**.

    Die genannte Formel liefert einen Ausdruck für die höheren Ableitungen der Hintereinanderausführung von Funktionen, nämlich

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum \frac{m!}{b_1!b_2!\dots b_m!}g^{(k)}(f(t))\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}$$

    wobei $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$ und $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$.

    Es soll ein kombinatorischer Beweis gegeben werden, der die Bell-Polynome und Mengenpartitionen verwendet.

    Siehe [11, Abschn.1-2].

16. **Nichtkreuzende Partitionen und Permutationen**.

    Wenn man Permutationen nach der Anzahl der Transpositionen in einer minimalen Faktorisierung sortiert, ergibt sich das Hasse-Diagramm des Verbands der nichtkreuzenden Mengenpartitionen.

    Siehe [14, 3, 5].

17. **Turmpolynome**.

    Sei r_k die Anzahl der Möglichkeiten, k Türme auf einem Schachbrett (d.h., einer Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$) aufzustellen, dann ist $r(x) = \sum r_k x^k$ das *Turmpolynom* (engl. *rook polynomial*) des gegebenen Schachbretts. Es stellt sich heraus, daß das Turmpolynom identisch ist mit einem gewissen dem Schachbrett zugeordneten Graphen.

    Siehe [16, 8].

Bei Bedarf können weitere Themen angeboten werden.

Betreuer: E. Dragoti-Çela für Themen 1 bis 8, F. Lehner für Themen 9 bis 17.

Literatur

[1] Beck, Matthias und Sinai Robins: *Computing the continuous discretely.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007. Integer-point enumeration in polyhedra.

[2] Benko, David: *A new approach to Hilbert's third problem.* Amer. Math. Monthly, 114(8):665–676, 2007.

[3] Biane, Philippe: *Some properties of crossings and partitions.* Discrete Math., 175(1-3):41–53, 1997.

[4] Boyd, Stephen, Persi Diaconis, Jun Sun und Lin Xiao: *Fastest mixing Markov chain on a path.* Amer. Math. Monthly, 113(1):70–74, 2006.

[5] Brady, Thomas: *A partial order on the symmetric group and new $K(\pi, 1)$'s for the braid groups.* Adv. Math., 161(1):20–40, 2001.

[6] Daskin, M.S.: *Networks and Discrete Location: models, algorithms and applications.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.

[7] Diestel, R.: *Graph Theory, Third Edition.* Springer, 2005.

[8] DUNHAM, J.B.: *Matching Polynomials and the Problem of the Rooks.* Talk, 2007.

[9] GOODMAN, R.: *Alice through looking glass after looking glass: the mathematics of mirrors and kaleidoscopes.* Amer. Math. Monthly, 111(4):281–298, 2004.

[10] IONASCU, EUGEN J. und GABRIEL PRAJITURA: *Things to do with a broken stick.* Preprint, 2010. `http://arxiv.org/abs/1009.0890`.

[11] JOHNSON, WARREN P.: *The curious history of Faà di Bruno's formula.* Amer. Math. Monthly, 109(3):217–234, 2002.

[12] JUNGNICKEL, D.: *Graphs, networks and algorithms*, Band 5 der Reihe *Algorithms and Computation in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Second Auflage, 2005.

[13] MATOUŠEK, J. und J. NEŠETŘIL: *Diskrete Mathematik: eine Entdeckungsreise.* Springer, 2007.

[14] MCCAMMOND, JON: *Noncrossing partitions in surprising locations.* Amer. Math. Monthly, 113(7):598–610, 2006.

[15] MCHUGH, J.A.: *Algorithmic Graph Theory.* Prentice Hall International Edititions, New Jersey, 1990.

[16] R.GRIMALDI: *Discrete and Combinatorial Mathematics.* Pearson, 1985, 1999, 2004.

[17] SHERMAN, DAVID: *Variations on Kuratowski's 14-set theorem.* Amer. Math. Monthly, 117(2):113–123, 2010.