Der Satz von Pick und Ehrhart Polynome

Sebastian Wimmer - 1030108

21. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

Der Satz von Pick sagt, daß die Fläche eines ebenen konvexen Polygons mit ganzzahligen Koordinaten durch einfaches Abzählen der ganzzahligen Punkte bestimmt werden kann. Daüberhinaus wird die Anzahl der ganzzahligen Punkte bei "Aufblasen" des Polygons durch ein Polynom beschrieben. Die Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen heißt Ehrhart-Polynom. Aufgabe ist es, einen Beweis des Satzes von Pick und ein paar Eigenschaften des Ehrhart-Polynoms zu präsentieren.

2 Der Satz von Pick

Der Satz von Pick, benannt nach dem österreichischen Mathematiker Georg Alexander Pick, beschreibt eine fundamentale Eigenschaft von einfachen Gitterpolygonen. Dies sind Vielecke, deren sämtliche Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.

Satz von Pick 2.1. *Sei A der Flächeninhalt eines Polygons. I die Anzahl der Gitterpunkte. P die Anzahl seiner Innerer Punkte. Dann gilt:*

$$A = I + \frac{R}{2} - 1 \tag{1}$$

2.1 Beweis

Proof. Zunächst wird die Additivität der Formel bewiesen dazu wird ein belibiges Gitterpolygon, mit Hilfe einer zwei Eckpunkte verbindenden Strecke, in zwei Gitterpolygone zerlegt (siehe Abbildung 1).

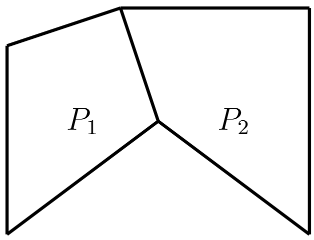


Abbildung 1: Zerlegung eines Polygons

Wir bezeichnen mit I_1/I_2 die Gitterpunkte im Inneren von P_1/P_2. Analog dazu R_1/R_2 die Gitterpunke am Rand von P_1/P_2. T steht für die Punkte auf der Schnittgeraden von P_1 und P_2.
Offensichtlich gilt:

$$A = A_1 + A_2 \tag{2}$$

$$A = I_1 + \frac{R_1}{2} - 1 + I_2 + \frac{R_2}{2} - 1 \tag{3}$$

Andererseits gilt auch:

$$I = I_1 + I_2 + T - 2$$
$$R = R_1 + R_2 - 2 * t + 2$$

Und daraus folgt:

$$A = I_1 + I_2 + T - 2 + \frac{R_1 + R_2 - 2 * t + 2}{2} - 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$A = I_1 + \frac{R_1}{2} - 1 + I_2 + \frac{R_2}{2} - 1$$

Das selbe Ergebnis, das wir auch aus (3) bekommen haben. Damit ist die Additivität gezeigt.

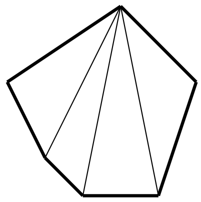


Abbildung 2: Triangulierung eines konvexen Polygons

Jedes beliebige Polygon ohne Löcher kann in Dreiecke zerlegt werden. Für den Fall, dass das Polygon konvex ist, kann dies einfach erreicht werden in dem man einen Eckpunkt nimmt und von diesem ausgehend die anderen Eckpunkte über Geraden verbindet (siehe Abbildung 3).

Etwas komplizierer gestaltet sich das Zerlegen nicht komplexer Polygone. Hier kann man sich mit der Ear Clipping Triangulierung helfen. Dabei nimmt man die beiden Nachbar Punkte eines Punktes eines Polygons und bildet daraus ein Dreieck (Solche Punkte können in jedem Polygon gefunden werden). Diese Dreieck nennt man “Ohr“. Schneidet man diese Dreieck ab so bekommt man wiederum ein Polygon auf welches der Algorithmus erneut angewendet werden kann (siehe Abbildung 3).

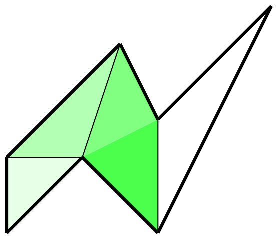


Abbildung 3: Triangulierung eines konkaven Polygons

Jedes Dreieck kann von einem Rechteck umzeichnet werden welches ganzzahlige Eckpunkte besitzt, wodurch sich der Beweis des Satzes von Pick weiter reduziert (siehe Abbildung 4).

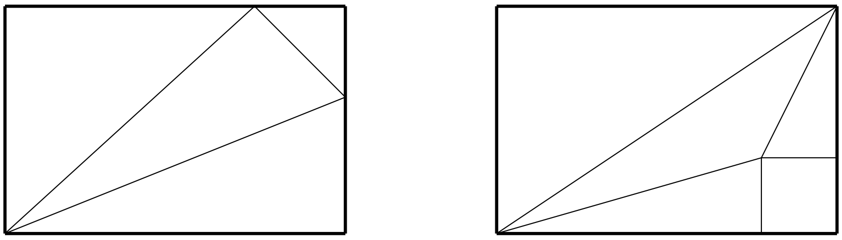


Abbildung 4: Einbettung eines Dreieckes

Es reicht jetzt also den Satz von Pick für ganzzahlige Rechtecke deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und für ganzzahlige rechtwinkelige Dreiecke deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen zu beweisen.

Für den Flächeninhalt eines Rechteckes gilt im Allgemeinen $A = a * b$. Das selbe Ergebnis sollte auch mit dem Satz von Pick erzielt werden.
Die Anzahl der Inneren Punkte eines Rechteckes entspricht $(a-1)*(b-1)$.
Die Anzahl der Randpunkte ergibt sich aus $2*(a+b)$
Eingesetzt in den Satz von Pick ergibt sich folgendes:

$$
\begin{aligned}
A &= (a-1)*(b-1) + \frac{2*(a+b)}{2} - 1 \\
A &= (a*b - a - b + 1) + (a+b) - 1 \\
A &= a*b
\end{aligned}
$$

Als letzter Schritt gilt es den Satz für rechtwinkelige Dreiecke zu zeigen. Dies kann jedoch sofort aus der Additivität geschlossen werden, da es sich bei rechtwinkeligen Dreiecken um halbe Rechtecke handelt.
Somit ist der Satz von Pick bewiesen. $\square$

3 Ehrhart Polynome

3.1 Definition

Ehrhart Polynome 3.1. *Sei $\mathcal{P}$ ein n - dimensionales Gitterpolytop in $\mathbb{Z}^n$. Dann existiert ein eindeutige bestimmtes Polynom $L_{\mathcal{P}}$ (das **Ehrhart Polynom**) mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ und folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle ganzen Zahlen $t \geq 0$ gilt : $L_{\mathcal{P}}(t) = \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)$*
2. *Der führende Koeffizient von $L_{\mathcal{P}}(t)$ ist das Volumen von $\mathcal{P}$*
3. *$L_{\mathcal{P}}(0) = 1$*
4. *$L_{\mathcal{P}}(t)$ besitzt den Grad n*

3.2 Der Satz von Pick als Spezialfall des Ehrhart Polynoms

Zur Erinnerung, der Satz von Pick besagt folgendes:

$$A = I + \frac{R}{2} - 1 \tag{4}$$

Sei jetzt t eine positive ganze Zahl, dann bezeichnet $tP := \{tx | x \in \mathcal{P}\}$ eine Streckung von $\mathcal{P}$ um den Faktor t. Die Fläche von $t\mathcal{P}$ ist At^2 und die Anzahl der Punkte am Rand ist Bt. Sei jetzt $I(t)$ die Anzahl der Punkte im Inneren von $t\mathcal{P}$, dann wird aus (4):

$$At^2 = I(t) + \frac{B}{2}t - 1 \tag{5}$$

Wir wissen, dass die Anzahl von ganzzahligen Punkten von $t\mathcal{P}$ sich zusammensetzt aus $I(t) + Bt$. Durch Addieren von $\frac{B}{2}t + 1$ zu beiden Seiten von (5), erhalten wir ein quadratisches Polynom $L_p(t)$ zur Berechnung der Anzahl der ganzzahligen Punkte in und auf $t\mathcal{P}$. Es ergibt sich für $L_{\mathcal{P}}(t)$ folgende Gestalt:

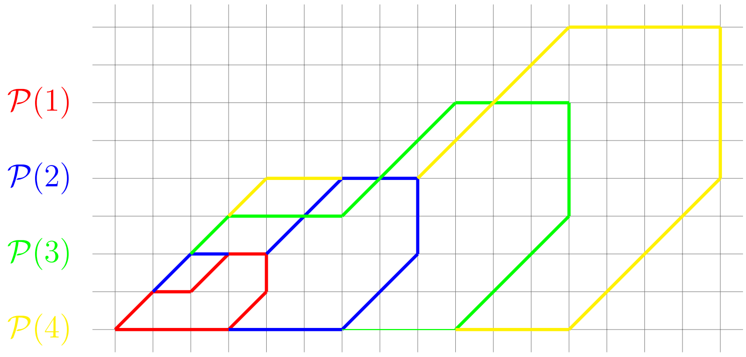
$$L_{\mathcal{P}}(t) = At^2 + \frac{B}{2}t + 1 \tag{6}$$

3.3 Berechnung des Ehrhart Polynoms

Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^n$ dann hat ja das Ehrhart Polynom laut Eigenschaften den Grad n. Daraus folgt dass man $n + 1$ Unbekannt berechnen muss. Diese bekommt man in dem die Gitterpunkte im Polygonen zählt, anschließend um das 2-fache “aufbläst“ wieder zählt usw. bis man beim n+1-fachen ankommt:

$$L_{\mathcal{P}}(i) = \#(i\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) \text{ mit } i = 1, 2, ..., n + 1 \tag{7}$$

3.4 Beispiel $\mathbb{Z}^2$



Wir befinden uns im $\mathbb{Z}^2$, d.h wir suchen ein Polynom vom Grad 2 der Form $ax^2 + bx + c$, wir bekommen die 3 Unbekannten durch folgende Gleichungen:

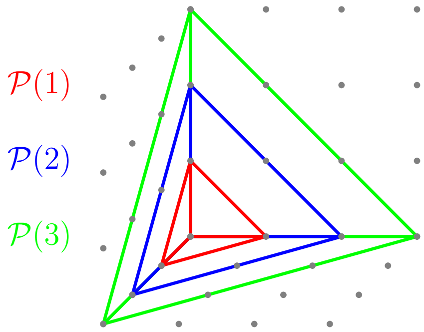
$$L_{\mathcal{P}}(1) = 10$$
$$L_{\mathcal{P}}(2) = 28$$
$$L_{\mathcal{P}}(3) = 55$$

Das ergibt folgende Lösung für das Ehrhart Polynom:

$$L_{\mathcal{P}}(t) = \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t + 1$$

Um das zu überprüfen betrachten wir $L_{\mathcal{P}}(4)$, wenn wir hier die Gitterpunkte zählen (siehe oben) ergibt das 91. Das selbe Ergebnis bekommt man auch durch ausrechnen des Ehrhart Polynoms von $L_{\mathcal{P}}(4)$.
Leichter wäre es gewesen das Ehrhart Polynom mit Hilfe des Satzes von Pick zu berechnen da wir hier nur in die Formel einsetzen hätten müssen: $L_{\mathcal{P}}(t) = At^2 + \frac{B}{2}t + 1$ Der Flächeninhalt A von $L_{\mathcal{P}}(t)$ ist ja wie man leicht sieh $\frac{9}{2}$ und die Anzahl der äußeren Punkte zufälligerweise ebenfalls 9.

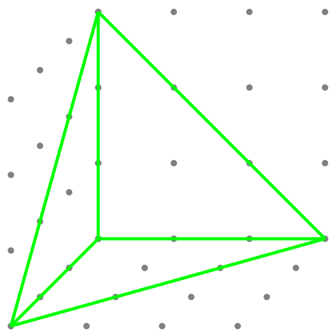
3.5 Beispiel $\mathbb{Z}^3$



Gesucht ist hier ein Polynom vom Grad 3. D.h wir müssen 4 Unbekannte berechnen. Wir können uns diese Beispiel etwas erleichtern indem wir 2 Eigenschaften des Ehrhart Polynoms ausnützen, und zwar folgende: $L_{\mathcal{P}}(0) = 1$ und der führenden Koeffizient entspricht dem Volumen von $L_{\mathcal{P}}(t)$ und das ist in diesem Fall: $\frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Damit haben wir bereits folgende Form des Ehrhart Polynoms gefunden:
$L_{\mathcal{P}}(t) = \frac{1}{6}x^3 + bx^2 + cx + 1$
Um die letzten 2 Koeffizienten zu bekommen setzen wir einfach ein, und zwar $L_{\mathcal{P}}(1) = 4$ und $L_{\mathcal{P}}(2) = 10$
Das ergibt dann für das Ehrhart Polynom folgende Gestalt: $L_{\mathcal{P}}(t) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{11}{6}x + 1$

3.6 Beispiel $\mathbb{Z}^n$

Das ganze fuktioniert natürlich auch für höhere Dimensionen. Jedoch stoßen wir hier auf ein Problem und zwar das Abzählen der Gitterpunkte.
Der Einfachheit halber betrachten wir ein konvexes Polygon aus dem $\mathbb{Z}^n$ mit $n \geq 4$. (Sollte das Polygon nicht komplex sein kann mit Hilfe der Triangulierung eine konvexe Zerlegung erzeugt werden.)
Dieses Polygon ist durch Seiten begrenzt, diese Seiten können als $n-1$ dimensionale Unterräume (Hyperebenen) aufgefasst werden (Im Beispiel vorher wären das jene Ebenen die die Pyramide umschließen). Um jetzt jene Punkte zu finden die in dem Polygon liegen betrachtet man die zugehörigen Normalvektoren zu den Hyperebenen. Lässt sich ein Gitterpunkt als Kombination von $P_i + t_i * \vec{n_i}\ \forall i = 1, ..., k$ darstellen, (Wobei P_i ein beliebiger Punkt der i-ten Hyperebene ist und $\vec{n_i}$ der dazugehörige Normalvektor der ins Innere des Polygons zeigt. k beschreibt die Anzahl an Hyperebenen die das Polygon begrenzen.) dann liegt der Punknt im Innerern des Polygons.
Das ganze nochmals kurz zur Veranschaulichung am vorherigen Beispiel:
Betrachte $\mathcal{P}(3)$



Die 4 Normalvektoren sind leicht ersichtlich:

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \vec{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \vec{n_3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \vec{n_4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Es können jetzt leicht die Punkte gefunden werden die die Obere Bedinung erfüllen. Als Beispiel $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ kann dargestellt werden als:

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 1 * \vec{n_1}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 0 * \vec{n_2}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1 * \vec{n_3}$ und $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} + 1 * \vec{n_4}$

Hingegen $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ kann nicht dargestellt werden als $P_4 + t_4 * \vec{n_4}$ da dieser Punkt auf der "falschen Seite" der Ebene liegt.

4 Quellennachweis

BECK MATTHIAS und SINAI ROBINS: Das Kontinuum diskret berechnen. Springer 2007
WIKIPEDIA: Ear Clipping Triangulierung.
STEVEN V SAM: A Bijective Proof for a Theorem of Ehrhart 2009