Unendliche Graphen

Daniel Perz

24. Dezember 2011

1 Definition

Definition 1. *Ein Graph G heißt lokal endlich, wenn alle Knotengrade endlich sind.*

Definition 2. *Ein Graph G=(V,E) heißt Strahl, wenn gilt*

$$V = \{x_0, ...\}$$

$$E = \{x_0x_1, x_1x_2, ...\}$$

und Doppelstrahl, wenn gilt

$$V = \{..., x_{-1}, x_0, x_1...\}$$

$$E = \{...x_{-2}x_{-1}, x_{-1}x_0, x_0x_1, x_1x_2, ...\}$$

Definition 3. *Ein Graph besitzt unendliche Breite, wenn ein Knotengrad unendlich ist.*

Ein Graph besitzt unendliche Länge, wenn ein Teilgraph ein Strahl ist.

Definition 4. *Die Teilstrahlen eines Strahls oder eines Doppelstrahls werden Schwänze genannt.*

Definition 5. *Das Ende eines Graphen G ist die Äquivalenzklasse aller Strahlen, bei denen 2 Strahlen äquivalent sind, wenn für jede endliche Menge $S \subseteq V(G)$ gilt, dass beide Strahlen einen Schwanz haben, welche einen gemeinsamen Knoten in G-S haben.*

Definition 6. *Die Menge aller Enden von einem Graph G sei die Menge $\Omega(G)$. und $G = \{ V, E, \Omega \}$ bedeutet, dass der Graph Knoten V, Kanten E und Enden Ω hat.*

Definition 7. *Der Knotengrad in einem Ende ist das Maximum der Anzahl der disjunkten Strahlen in diesem Ende.*

Der Kantengrad in einem Ende ist das Maximum der Anzahl der Strahlen, welche keine Kante gemeinsam haben.

Definition 8. *Eine Bipartition einer Menge von Knoten eines Graphen nennt man unfreundlich, wenn jeder Knoten in der anderen Klasse mindestens gleich viele Nachbarn hat wie in der eigenen.*

Definition 9. *Ein zählbarer Graph G^* wird universal genannt in P mit der Graphenrelation $\leq$, wenn gilt $G^* \in P$ und $G \leq G^*$ für alle zählbaren Graphen G in P.*

Definition 10. *Ein Graph wird homogen genannt, wenn jeder Isomorphismus zwischen 2 endlichen induzierten Subgraphen zu einem Autoorphismus auf den ganzen Graphen erweitert werden kann.*

2 Königslemma

Lemma 11. *Sei $V_1, V_2, ...$ eine unendliche Reihe von nicht leeren endlichen Mengen. Weiters sei G der Graph der Vereinigung dieser Mengen. Zusätzlich gilt, dass jeder Knoten in V_n auch einen Nachbarn in V_{n-1} hat, für $n \geq 1$. Dann gilt: Es existiert ein Strahl $v_0 v_1 ...$ mit $v_n \in V_n$ für alle n.*

Beweis. Sei P die Menge aller endlichen Pfade in G. Da V_0 endlich ist, aber P unendlich ist, enden unendlich viele Pfade im Knoten $v_0 \in V_0$. Da V_1 auch endlich ist, gibt es nun auch einen Knoten $v_1 \in V_1$, der mit v_0 benachbart ist, in dem unendlich viele endliche Pfade enden. Daher gibt es auch eine Punkt $v_2 \in V_0$, der mit v_1 benachbart ist, in dem unendlich viele endliche Pfade enden und so weiter. Also wird für jedes $n \geq 0, v_n$ definiert, wobei in jedem dieser v_n unendlich viele endliche Pfade enden. Weiters gilt, dass für $n \geq 1 V_n$ mit V_{n-1} verbunden ist. Daraus folgt schließlich, das $\{v_0 v_1 ...\}$ ein Strahl ist. □

Eine direkte Folgerung aus diesem Lemma ist, dass ein zusammenhängender unendlicher Graph immer unendliche Länge oder unendliche Breite hat. Wenn der Graph unnendliche Breite hat, ist alles klar. Wenn aber alleKnotengrade endlich sind, dann kann man G zerlegen. Man startet mit einem beliebigen Knoten v_0 und gebe ihn in V_0. Dann nimmt man seine endlich vielen Nachbarn und gibt sie in V_1 und entfernt v_0 und alle Kanten die von ihm ausgehen. Alle Mengen sind endlich, weil alle Knotengrade endlich sind, also jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn hat. Es gibt unendlich nichtleere Mengen, weil in jedem V_n nur endlich viele Knoten sind, es aber unendlich viele Knoten gibt.

3 Beweistechniken

Bei der sogenannten transfiniten Induktion wird ähnlich wie bei der endlichen Induktion, nur startet man schon mit unendlichen vielen Schritten. Der folgende Satz wird nun mit transfiniter Induktion bewiesen.

Satz 1. *Jeder zusammenhängender Graph hat einen Spannbaum.*

Beweis. Sei G ein zusammenhängender Graph. Seien Bäume $T_\alpha \subseteq G$ so definiert, dass gilt: $T_\beta \subseteq T_\alpha$ für alle $\beta{<}\alpha$.

T_0 existiert dann aus einem einzigem Knoten. Sei jetzt $\alpha{>}0$ eine Grenze mit $T_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ ist. Da T_β Bäume sind, ist auch T_α ein Baum und erfüllt die erste Bedingung.

Sei nun $\alpha = \beta + 1$. Wenn gilt $G - T_\beta = \emptyset$, dann ist T_β ein Spannbaum und man kann die Rekursion beenden. Wenn dies nicht gilt, dann gibt es einen Knoten v_α, der durch die Kante e_α mit T_β verbunden ist. Dann ist T_α ein Baum, in dem gilt $T_\beta \subseteq T_\alpha$ für alle $\beta{<}\alpha$.

Nun ist nur noch zu untersuchen ob dieser Prozess jemals stoppt. Nun wird $v_{\beta+1}$ für alle $\beta<\gamma$ definiert, sodass $\beta \mapsto v_{\beta+1}$ eine injektive Abbildung ist mit $|\gamma| \leq |G|$. Dies wird aber nicht für alle γ erfüllt, also endet die Rekursion.

(Ein Gegenbeispiel ist, wenn γ die wohlgeordnete Potenzmenge von V(G) repräsentiert, gilt $|G| \leq \gamma$ wegen dem Satz von Cantor.) □

Bei Kompaktheitsbeweisen kennt man die Eigenschaften aller endlichen Teilgraphen und will eine Aussage über den gesamten Graphen treffen. Bei dieser Art von Beweisen ist das Königslemma oft hilfreich.

Satz 2. *Sei G = (V, E) ein Graph und k eine natürliche Zahl. Wenn jeder endliche Teilgraph von G höchstens chromatische Zahl k hat, dann gilt das auch für G.*

Beweis. Sei $v_0, v_1...$ eine Aufzählung der Elemente von V und sei $G_n = [v_0, ..., v_n]$. Sei V_n die Menge aller k-Färbungen von G_n mit Farben in $1, ..., k$. Dann definiert man einen Graph auf $\bigcup_{n\geq 0} V_n$, indem man alle Kanten cc' einfügt, sodass $c \in V_n$ und $c' \in V_{n-1}$, sodass c' ein Teilgraph von c ist. Dann existiert laut dem Königslemma ein Strahl. Dieser Strahl sei $c_0 c_1 ...$ mit $c_n \in V_n$ für alle n aus den nichtnegativen ganzen Zahlen. dann ist für n aus dn ganzen Zahlen, $\bigcup_{n\geq 0} c_n$ eine k-Färbung von G. □

Nun ein zweiter Beweis für allgemeine Graphen mit dem Kompaktheitsargument.

Beweis. Sei $X := V$ und $S := \{1, ..., k\}$. Mit F bezeichnet man die Menge aller endlichen Teilmengen von V. Für jedes $Y \in F$ sei A(Y) die Menge aller k-Färbungen von G[Y].

Wegen dem Kompaktheitsprinzip reicht es zu zeigen, dass man für eine gegebene endliche Menge $Z \subseteq F$, sodass eine Funktion $V \leftarrow \{1, ..., k\}$, welche für jeden Graph G[Z] mit $Z \in Y$ eine k-Färbung induziert. Dafür nimmt man eine k-Färbung des endlichen Graphen $G[\bigcup Z]$ und erweitert sie geeignet. □

4 Satz von Halin

Satz 3. *Wenn ein unendlicher Graph G k disjunkte Strahlen für alle naturlichen Zahlen k besitzt, dann besitzt dieser Graph unendlich viele disjunkte Strahlen.*

Beweis. Man konstruiert die unendlich vielen disjunkten Strahlen durch Induktion. Nach n Schritten hat man die n disjunkten Strahlen $R_1^n, ..., R_n^n$ und deren Anfangssegmente $R_i^n x_i^n$ gefunden. Im Schritt n+1 wählt man dann die Strahlen $R_1^{n+1}, ..., R_{n+1}^{n+1}$ so, dass $R_i^n x_i^n$ ein geeignetes Anfangssegment von $R_i^{n+1} x_i^{n+1}$ ist für i=1, ..., n. Dann bilden für n aus den natürlichen Zahlen die Graphen $R_i^* := \bigcup_{n\geq 1} R_i^n x_i^n$ eine unendliche Familie $(R_i^*)_{i\geq 1}$ von disjunkten Strahlen in G.

Für n=0 hat man eine leere Menge von Strahlen, wie erfordert. Nun seien $R_1^n, ..., R_n^n$ gewählt und man führt den Schritt auf n+1 aus. Zur Vereinfachung setzt man $R_i^n = R_i$ und $x_i^n = x_i$. Sei R eine Menge von $|R_1 x_1 \cup ... \cup R_n x_n| + n^2 + 1$ disjunkten Strahlen. Die Strahlen existieren existieren laut Annahme. Sofort löscht man alle Strahlen aus R, welche einen der Pfade $R_1 x_1, ..., R_n x_n$ schneiden,somit enthält R mindestens $n^2 + 1$ disjunkte Strahlen.

Man wiederholt nun den folgenden Schritt so oft wie möglich. Falls es ein $i \in \{1, ..., n\}$ gibt, sodass R_i^{n+1} noch nicht definiert ist und $\overline{x_i}R_i$ höchstens n der Strahlen in R schneidet, dann löschen wir diese Strahlen aus R und setzen $R_i^{n+1} := R_i$ und wähle x_i^{n+1} als den Nachfolger von x_i. Sei I die Menge mit $i \in \{1, ..., n\}$ und R_i^{n+1} noch immer undefiniert. Weiters sei $|I| := m$. Dann enthält R noch immer mindestens $m^2 + 1$ Strahlen. Jeder Strahl R_i mit $i \in I$ enthält mehr als $n \geq m$ der Strahlen in R. Sei z_i der erste Knoten auf dem m-ten Strahl den R_i trifft. Dann trifft $Z := \bigcup_{i \in I} x_i R_i z_i$ höchstens m^2 Strahlen in R. Man löscht nun die restlichen Strahlenaus R und setzt einen der Gelöschten als R_{n+1}^{n+1}.

Von den übrigen Strahlen $S \in R$ wählt man den Knoten y=y(S) hinter dem letzten Knoten in Z und setzt $Y := \{y(S) | S \in R\}$. Sei H die Vereinigung von Z und allen Pfaden $Sy(S \in R)$. Dann kann $X := \{x_i | i \in I\}$ nicht von Y in H getrennt werden mit weniger als m Kanten, weil sonst würden beide einen der m Strahlen R_i mit $i \in I$ nicht treffen und dann einer von den m Strahlen in S $x_i R_i z_i$ trifft für dieses i. Also gilt, dass es m disjunkte Y-X Pfade $P_i = x_i ... y_i (i \in I)$ gibt in H. Für $i \in I$ sei $R_i^{'}$ ein Strahl aus R der y_i enthält und wähle R_i^{n+1} den Strahl $R_i x_i P_i y_i R_i^{'}$ und setze $x_i^{n+1} := y_i$ □

5 Topologische Sicht

Zuallererst muss man den topologischen Raum $|G|$ mit $G = (V, E, \Omega)$ definieren. Für jede Kante $e = uv$ fügt man eine Menge $\mathring{e} = (u, v)$ hinzu, welche aus zusammenhängenden Punkten besteht. Die $\mathring{e}$ sind alle paarweise disjunkte Mengen und haben keinen Punkt in $V \cup \Omega$. Dann wählt man für jedes e eine festgelegte Bijektion zwischen e̊ und dem reellen Intervall (0,1) und erweitern diese Bijektion auf $[u, v] := \{u\} \cup \mathring{e} \cup \{v\}$ und [0,1]. Diese Bijektion definiert nun eine Metrik auf [u,v]. Weiters wird [u,v] topologische Kante genannt mit inneren Punkten $x \in \mathring{e}$. Für $F \subseteq E$ schreibt man nun $\mathring{F} := \bigcup\{\mathring{e} | e \in F\}$. Wenn man nun von einem Graph $H \subseteq G$ spricht meint man auch die Menge $V(H) \cup \mathring{E}(H)$. Damit ist die Punktmenge von $|G|$ definiert.

Nun wird die Topologie offener Mengen definiert. Für jede Kante uv definiere als offen jene Untermenge von (u,v), welche mit der Bijektion von (u,v) nach (0,1) einer offenen Menge in (0,1) entsprechen. Für jeden Knoten u und $\epsilon > 0$ definiert man, die Menge aller Punkte auf den Kanten [u,v] mit Abstand kleiner als ϵ ist offen, für jede Kante extra gemessen auf der Metrik nach [0,1]. Für jedes Ende ω und endliche Menge $S \subseteq V$ existiert eine eindeutige Kompontente $C(S, \omega)$ aus G-S, welche Strahlen aus ω enthält.

Sei $\Omega(S, \omega) := \{\omega' \in \Omega | C(S, \omega') = C(S, \omega)\}$

Für jedes $\epsilon > 0$ ist $\mathring{E}_\epsilon(S, \omega)$ die Menge aller inneren Punkte von $S - C(S, \omega)$ mit einer Entfernung kleiner als ϵ von ihrem Endpunkt in $C(S, \omega)$. Dann werden als offen alle Mengen bezeichnet, die die Form

$$\hat{C}_\epsilon(S, \omega) := C(S, \omega) \cup \Omega(S, \omega) \cup \mathring{E}_\epsilon(S, \omega)$$

haben.

Der Abschluss von $X \subseteq G$ wird mit $\overline{X}$ bezeichnet. Der Abschluss eines Teilgraphen H=(U,F) von G in $|G|$ ist $\overline{H} := \overline{U} \cup \mathring{F}$. Wenn X ein Teilraum von $|G|$ ist und es gilt $X = \overline{H}$, wobei H ein Teilgraph ist, dann bezeichnet man X als Standartunterraum. Weiters bezeichnet man dann F als E(X) und sagt

X wird von $\overline{H}$ aufgespannt. Wenn $F \subseteq E$ eine Menge von Kanten und U eine Menge von Endpunkten ist, kürzt man $\overline{(U, F)}$ mit $\overline{F}$ ab und sagt X wird von $\overline{F}$ aufgespannt.

Definition 12. *X wird Hausdorff-Raum genannt, wenn für zwei unterschiedliche Punkte x und y Umgebungen U und V existieren, sodass $U(x) \cap V(y) = \emptyset$.*

Definition 13. *Seien X, Y topologische Räume. Sei f eine Abbildung von X nach Y. Dann wird f dann Homöomorphismus genannt, wenn f bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung stetig ist.*

Definition 14. *Sei X ein beliebiger Hausdorff-Raum, dann nennt man X ist verbunden genau dann, wenn X nicht als Vereinigung zweier nichtleerer offener disjunkter Teilmengen darstellbar ist.*

Definition 15. *Ein Bogen in X ist das homöomorphe Bild von [0,1] nach X. Dieser verbindet die Bilder von 0 und 1, welche auch Endpunkte genannt werden.*

Beispiele für Bögen wären endliche Pfade oder ein Strahl, wobei bei einem Strahl, dessen Ende ein Endpunkt ist.

Definition 16. *Der Knotengrad in einem Ende ω von X ist die maximale Anzahl von disjunkten Bögen, welche in ω einen gemeinsamen Endpunkt haben.*

Wenn $X = |G|$ gilt und G lokal endlich ist, dann stimmen der kombinatorische Kantengrad und der topologische Kantengrad am Ende überein.

Verbunden durch einen Bogen ist eine Äquivalenzrelation folgendermaßen: Jeder x-y Bogen A hat einen ersten Punkt p auf dem y-z Bogen A' und die Abschnitte Ap und pA' formen zusammen einen x-z Bogen ApA'.

Definition 17. *Die Äquivalenzklassen der vorher beschriebenen Äquivalenzrelation heißen Bogenkomponenten.*

Zwei Punkte sind genau dann bogenverbunden, wenn nur eine Bogenkomponente existiert.

Da [0,1] verbunden ist, gilt, wenn x und y bogenverbunden sind, dass sie auch verbunden sind.

Definition 18. *Ein Kreis in einem topologischen Raum X ist ein homöomorphes Bild des Einheitskreises in X.*

Die Menge aller Kanten die den Kreis aufspannt, nennt man Umfang.

Definition 19. *Ein topologischer Spannbaum von G ist ein bogenverbundener Standartunterraum von $|G|$, welcher alle Knoten enthält, aber keinen Kreis.*

Bei topologischen Spannbäumen kann es zu interessanten Phänomenen kommen. So kann es passieren, dass T ein Spannbaum ist aber $\overline{T}$ einen Kreis enthält. Auf der anderen Seite kann es passieren, dass $\overline{T}$ ein topologischer Spannbaum ist, aber T nicht zusammenhängend ist.

Literatur

[1] http://diestel-graph-theory.com/basic.html