Orientierung in Graphen

Kotzent Martina

23. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung

.[3] Zu Begin wiederholen wir ein paar Begriffe aus der Graphentheorie.

Definition. (Graph)
Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{x, y\}|x \in V, y \in V, x \neq y\}$ die Menge der Kanten ist.

Definition. (Gerichteter Graph)
Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq V \times V$ eine Relation auf V, die Menge der Kanten ist.

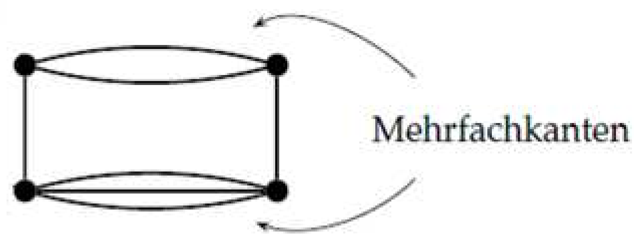
In der graphischen Darstellung des Graphen werden die Knoten als Punkte oder Kreise und die Kanten als Pfeile dargestellt. Ein Pfeil zeigt vom Knoten $u \in V$ zum Knoten $v \in V$, wenn $(u, v) \in E$.

2 Multigraph

Wir haben die Kanten in einem Graphen als 2-elementige Teilmenge der Knotenmenge definiert. Das bedeutet unter anderem, dass zwei Knoten durch höchstens eine Kante verbunden sein können. In manchen Anwendungen ist es jedoch natürlich zugelassen, dass zwei Knoten durch mehrere verschiedene Kanten, so genannten $Mehrfachkanten$, verbunden sind. Man spricht dann von sogenannten $Multigraphen$.
Wir können die Kanten statt als Mengen auch als Funktion auffassen, die jedem Paar $\{u, v\}$ von Knoten eine nicht negative Zahl $m(u, v)$, die $Vielfachheit$ der Kante $\{u, v\}$, zuordnet. $m(u, v) = 0$ würde also bedeuten, dass die Kante in dem Graphen nicht vorhanden ist. $m(u, v) = 1$ wäre eine "gewöhnliche" (Einfach-) Kante und $m(u, v) > 1$ hieße, dass der Graph $m(u, v)$ "Kopien" der Kante $\{u, v\}$ enthält.

Definition. (Multigraph)
Ein $Multigraph$ ist dann ein geordnetes Paar (V, m), wobei $m : \binom{V}{2} \to \{0, 1, 2, ...\}$.

Oder anders ausgedrückt ein Graph mit Mehrfachkanten ist ein geordnetes Tripel (V, E, ε), wobei V und E disjunkte Mengen sind und $\varepsilon : E \to \binom{V}{2}$ eine Abbildung, welche sich die Endknoten der Kanten "merkt".



3 Orientierung

Definition. (Orientierung)
Ein gerichteter Graph $G_g = (V_g, E_g)$ heißt *Orientierung* eines ungerichteten Graphen $G_u = (V_u, E_u)$ falls gilt:

- $V_g = V_u$
- für jede Kante $\{v, w\} \in E_g$ gilt $(v, w) \in E_g$ oder $(v, w) \in E_g$
- $|E_u| = |E_g|$

Eine Orientierung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ kann man als Abbildung

$$o : E \to V \times V \text{ mit } f(\{v, w\}) \in \{(v, w), (w, v)\} \text{ für } \{v, w\} \in E$$

auffassen.
Der gerichtete Graph ergibt sich dann als $G_o = (V, \{f(e)|e \in E\})$.

3.1 Vorstellen des Problems

.[1] Wir betrachten vorerst folgende Frage: "Wann ist es möglich, eine Zuweisung von Einbahnstraßen zu finden, wenn wir den Auftrag haben, dass jeder Punkt von jedem Punkt erreichbar sein muss?"
Wir beschäftigen uns mit dem allgemeinen Fall einer Stadt. Wo die meisten, aber nicht alle Straßen Einbahnstraßen sind. Wir zeigen, dass die Erreichbarkeit mit folgender Anfangsbedingung erhalten bleibt: Es gibt eine Zuordnung von Richtungen bei welcher die übrigen Zwei-weg-straßen auch in Einbahnstraßen umgewandelt werden können dann und nur dann wenn es möglich ist alle Straßen in Einbahnstaßen zu verwandeln.
Wenn es eine Lösung gibt, können wir zeigen, dass eine Entscheidung bezüglich der Zuordnungen der Richtung jeder individuellen Straße, zu bestimmter Zeit getroffen werden kann.

Um dieses Problem zu lösen führen wir eine Straffunktion ein, welche für die Umwandlung der Straßen zuständig ist. Am Ende sprechen wir kurz über einen Algorithmus der dieses Problem lösen kann.

Zum Vorteil für den Leser, besprechen wir noch einmal kurz ein paar Konzepte.
Ein *Graph oder ungerichteter Graph* (V, X) hat eine endliche Menge von Knoten V und eine Kanten-Menge X, welche aus zwei Teilmengen von V besteht. Ein *Digraph* oder *gerichteter Graph* (V, Y) besitzt eine endliche Menge von Knoten V und eine Bogen-Menge Y, welche geordnete Paare von V enthält.
Ein *Multigraph* gestattet mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten und er gestattet auch mehr als einen Bogen zwischen zwei Knoten. Ein Multigraph heißt *zusammenhängend*, wenn es einen Pfad zwischen allen Paaren von eindeutigen Knoten gibt. Ein Multigraph wird als *streng zusammenhängend* bezeichnet, wenn es einen *Dipfad (geordneten Pfad)* zwischen allen geordneten Paaren von eindeutigen Knoten gibt. Eine *Brücke* eines *zusammenhängenden Multigraphen G* ist eine Kante, welche beim Entfernen, den Graphen G unzusammenhängend macht. Wenn G keine Brücken enthält wird er *brückenlos* genannt.

Man kann das Problem von Robbins als Graphen-Theorie-Frage interpretieren, indem man eine Richtung für jede Kante aus dem Multigraph G auswählt, so dass der daraus reslutierende Multigraph $D(G)$ streng zusammenhängend ist. Wenn das möglich ist, heißt der ursprüngliche Multigraph *streng orientierbar*.
Der Satz von Robbins besagt, dass ein Multigraph dann und nur dann streng orientierbar ist, wenn er zusammenhängend und brückenlos ist.

3.2 Einleitende Maßnahmen

Um eine Lösung für Zwei-Weg-Straßen und Einbahnstraßen zu finden, definieren wir ein geeignetes Graphen-Theorie-Modell.
Ein gemischter (mixed) Multigraph G ist ein geordnetes Tripel (V, E, η), wobei V eine endliche Menge von Knoten, E eine endliche Menge von Kanten und η eine Funktion ist, die jedem Element $e \in E$ ein geordnetes Paar von V oder eine zwei-elementige Teilmenge von V zuordnet.
Wenn $\eta(e)$ das geordnete Paar (u, v) ist, sagen wir e ist eine gerichtete Kante von u nach v. Sonst ist e eine ungerichtete Kante.
Daraus ergibt sich, dass ein gemischter Mutigraph einen Multigraphen inkludiert und im Spezialfall einen Multidigraph. Wir sagen, dass das Anordnen einer ungerichteten Kante e von G bedeutet, dass wir eine Entscheidung für die Reihenfolge der beiden Endpunkte treffen und den Wert von $\eta(e)$ dementsprechend wählen müssen.
Eine *Orientierung* von einem gemischten Multigraphen G erhalten wir aus einem Multidigraph, indem wir jede ungerichtete Kante von G zu einer gerichteten Kante machen.
Das Umwandeln von einer ungerichteten Kante zu einer gerichteten Kante e von G bedeutet, dass wir den Wert von $\eta(e)$ vom geordneten Paar (u, v) zu dem ungeordneten Paar $\{u, v\}$ ändern. Den underlying Multigraph von einem gemischten Multigraphen erhalten wir durch Unrichten aller gerichteten Kanten.

Wir müssen nun eine entsprechende Verallgemeinerung des Problems von Robbins beweisen. Dieses besagt, dass eine streng zusammenhängende Orientierung von einem gemischten Multigraph existiert, ist zu beweisen. Um dies zu prüfen müssen wir ein paar weitere Begriffe definieren. Ein *Weg* von u nach v in einem gemischten Multigraph G ist eine alternierende Abfolge von Knoten und Kanten $u = v_0, e_1, v_1, ..., v_{n-1}, e_n, v_n = v$, so dass jede Kante e_j $j = 1, ..., n$ ein $\eta(e_j) = \{v_{j-1}, v_j\}$ oder $\eta(e_j) = (v_{j-1}, v_j)$ hat.
Wenn so ein Weg existiert, sagen wir, dass v erreichbar von u in G ist. Wir legen auch noch fest, dass jeder Knoten von sich selbst aus erreichbar ist.
Zum Schluß definieren wir noch einen gemischten Multigraph als *zusammenhängend*, wenn jeder Knoten von jedem Knoten aus erreichbar ist.

3.3 Der allgemeine Satz von Robbins

Es ist offensichtlich, dass ein gemischter Multigraph als ein Resultat von einem unvollständigen Versuch einen Multigraph zu orientieren, angesehen werden kann. Allerdings ist es möglich, dass ein Versuch, Richtungen von Kante zu Kante in einem gemischten Multigraph G anzuordnen dazu führen kann, dass wir eine Sackgasse darstellen. Dort ist keine weitere Entwicklung bezüglich eines streng zusammenhängenden Multidigraph möglich, obwohl G zusammenhängend ist. Dies kommt aber nicht im Hauptresultat vor.

Satz 3.1. *Sei e eine ungerichtete Kante von einem gemischten Multigraph G. Dann kann e gerichtet werden indem man einen anderen zusammenhängenden gemischten Multigraphen konstruiert dann und nur dann wenn e keine Brücke von dem underlying Multigraph von G ist.*

Beweis. Da $'' \Leftarrow''$ vom Satz trivial ist, setzen wir fort, indem wir zeigen, dass wenn keine Orientierung von e einen zusammenhängenden gemischten Multigraphen erzeugt, dann e eine Brücke vom underlying Multigraphen ist.

Seien u und w als Endpunkte von e gekennzeichnet. Wir zeigen zuerst, dass es keine Wege zwischen u und w in $G - e$ gibt.
Wir nehmen an, es gibt einen Weg W zwischen u und w im gemischten Multigraphen $G - e$. Wenn wir nun $\eta(e) = (w, u)$ setzen, resultiert dies in einem zusammenhängenden gemischten Multigraphen, da das Auftreten $...u, e, w, ...$ in einem Weg durch W ersetzt werden kann, so dass e in der Richtung von u nach w nicht durchlaufen werden muss .$\lightning$
Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass keine Orientierung von e einen zusammenhängenden gemischten Multigraphen erzeugt.

Sei nun U die Menge der Knoten in G, die in $G - e$ von u aus erreichbar sind und sei v ein Knoten aus U. Wir behaupten, dass u von v aus in $G-e$ erreichbar ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass u von v aus in G erreichbar ist. Wenn diese Erreichbarkeit die Kante e benötigt, dann ist w von u aus erreichbar in $G - e$.

Definiere $Y = V - U$, wobei V die Menge aller Knoten ist. Dann ist Y nicht leer, weil $w \in Y$. Weiters behaupten wir, dass alle Knoten aus Y von w aus in $G-e$ erreichbar sind. Um dies zu beweisen müssen wir nur anmerken, dass $t \in Y$ erreichbar von w in G sein muss. Wenn diese Erreichbarkeit die Kante e benötgt, dann ist w von u erreichbar in $G-e$.

Nun können wir den Beweis vollenden, indem wir zeigen, dass e die einzige Kante vom underlying Multigraphen ist, die einen Endknoten in Y und den anderen in U hat. Klarerweise schließt die Definition von U die Existenz von einer ungerichteten Kante zwischen U und Y aus. Ebenso schließt sie eine gerichtete Kante zwischen U und Y aus.
Daraus folgt, dass wenn es eine gerichtete Kante von U nach Y gibt, dann gibt es einen Weg W' in $G - e$ von w nach u, weil u in $G - e$ von jedem Knoten aus U erreichbar und jeder Knoten von Y erreichbar in $G-e$ von w ist. Wir haben aber gezeigt, dass ein solcher Weg W' nicht existiert. □

Ein trivialer Induktionsbeweis zeigt nun den Satz von Robbins für gemischte Multigraphen.

Satz 3.2. *Ein gemischter Multigraph G besitzt eine streng zusammenhängende Orientierung dann und nur dann wenn G zusammenhängend und der underlying Multigraph von G brückenlos ist.*

3.4 Weitere Erweiterung des Satzes von Robbins

Eine weitere Erweiterung des Satzes von Robbins folgt aus der Definition einer Straffunktion. Diese richtet die Kanten eines Multigraphen.
In einem Multigraphen (Multidigraphen) nennt man die Anzahl der Kanten (Bögen) in einem Pfad (Dipfad) *Länge*. Die Distanz $d(u, v)$ vom Knoten u zum Knoten v in einem Multigraphen (Multidigraphen) ist die Länge des kürzesten Pfad (Dipfad) von u nach v.
Der *Durchmesser* $d(G)$ von einem Multigraphen oder Multidigraphen ist die größte Distanz zwischen allen Paaren von Knoten.
Wir können dann den Aufwand der Orientierung D_j mit $d(D_j(G)) - d(G)$ messen. Nun wollen wir die Differenz aller möglichen Orientierungen minimieren.
Dazu defienieren wir:

$$\rho(G) = \min_j \{d(D_j(G)) - d(G)\}$$

Es ist nun interessant $\rho(G)$ für eine Klasse von Spezialfällen von Multigraphen zu berechnen. Wir geben hier das Resultat für zwei Fälle an: Der *vollständige Graph* K_p hat genau eine Kante zwischen jedem Paar von den p Knoten aus V, wenn die Kantenmenge V derart in zwei Teilmengen V_1 und V_2 aufgeteilt wird, so dass jeder Knoten von V_1 durch eine und nicht mehrere Kante mit jedem Knoten aus V_2 verbunden ist. Dann wird G als *vollständiger bipartiter Graph* $K_{m,n}$, wobei $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$, bezeichnet.

Satz 3.3. *Es gilt:*

$$\rho(K_p) = 1 \textit{ für } p \geq 3 \textit{ aber } p \neq 4$$

$$\rho(K_4) = 2$$

$$\rho(K_{n,n}) = 1 \textit{ für } n \geq 2.$$

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $d(K_p) = 1$. Da K_p keine Mehrfachkanten zwischen jedem Paar von Knoten hat, folgt daraus, dass entweder $d(u, v) \geq 2$ oder $d(v, u) \geq 2$ in $D_j(K_p)$ ist, da $\rho(K_p) \geq 1$. Um zu zeigen, dass $\rho(K_p) = 1$ ist fertigen wir eine Orientierung von K_p mit dem Durchmesser zwei für $p \neq 4$ an. Jetzt kann direkt gezeigt werden, dass eine Zwei-Durchmesser Orientierung für K_3 und K_6 existiert. (Wir erfahren in dem Prozess, dass $\rho(K_4) = 2$.)
Das allgemeine Resultat wird durch Induktion, angewandt auf ungerade p und gerade p, gezeigen:

Definiere die Verknüpfung von zwei Graphen $G_1 = (V_1, X_1)$ und $G_2 = (V_2, X_2)$ als einen Graphen $G_1 + G_2$ mit der Knotenmenge $V_1 \cup V_2$ und der Kantenmenge besteht aus $X_1 \cup X_2$ mit allen möglichen Verbindungskanten von V_1 nach V_2.
Wir stellen dann K_k als $K_{k-2} + K_2$ dar, wobei K_2 aus zwei Knoten u und v von K_k entsteht. Jetzt orientieren wir $\{u, v\}$ von u nach v. Orientiere von u aus alle anderen Kanten, die mit u verbunden sind und orientiere von v weg alle Kanten, die mit v verbunden sind.

Laut Induktionsannahme kann K_{k-2} orientiert werden um den Durchmesser zwei zu produzieren wenn $k-2=3$ oder $k-2 \geq 5$. Es ist ein einfacher Grund warum die resultierende Orientierung von $K_{k-2}+K_2$ Durchmesser zwei hat. Die Induktions Basis für $k=3$ liefert alle ungeraden Werte; die Induktionsbasis für $k=6$ ist erforderlich, um zu beweisen, dass die geraden Werte, wie K_4 nicht mit Durchmesser zwei orientiert werden können.

Betrachten wir nun zum $K_{n,n}$, man kann sehen, dass $\rho(K_{n,n}) \geq 1$. Da $d(K_{n,n})=2$ und in $D_j(K_{n,n})$ muss die Länge, die $u \in V_1$ mit $v \in V_2$ verbindet, von jedem Pfad ungerade sein. Das gewünschte Resultat erhalten wir, wenn wir eine Drei-Durchmesser Orientierung von $K_{n,n}$ erstellen.
Dies wird erfüllt, wenn wir alle n paarweise disjunkten Kanten, die von V_1 nach V_2 orientiert werden, mit allen restlichen Kanten, die von V_2 nach V_1 orientiert werden, wählen. Wir sehen nun, dass alle Paare von Knoten im resultierenden Digraphen durch einen Dipfad der Länge 1,2 oder 3 zusammenhängend ist.

$\square$

Leider ist es nicht möglich, dass man ein Verfahren anfertigen kann, um ρ für einen beliebigen Graphen zu bestimmen. Chvátal und Thomassen [2] haben gezeigt, dass dieses Problem, nämlich der Entscheidung, ob ein beliebiger ungerichteter Graph eine Orientierung mit dem Durchmesser zwei zulässt, zu den Problemen gehört, die NP-hart sind.

4 Algorithmus

4.1 Tiefensuche

.[4] Neben der Breitensuche ist die Tiefensuche (engl. depth first search) die am häufigsten verwendete Methode, einen Graphen zu durchlaufen. Anstatt wie bei der Breitensuche alle Nachbarn eines Knotens v zu markieren, läuft man zunächst möglichst "tief" in den Graphen hinein. Die Tiefensuche ist in Algorithmus 1. ausgeführt. Der Algorithmus verwendet einen Stack (auf Deutsch auch Stapel- oder Kellerspeicher). Ähnlich wie bei einer Warteschlange Q kann ein Element u in einen Stack S eingefügt (S.PUSH(u)) und später wieder entnommen werden (S.POP()) und mit S.IsEMPTY() kann überprüft werden, ob der Stack leer ist. Im Gegensatz zur Warteschlange werden bei einem Stack die Elemente jedoch nicht in der Reihenfolge entfernt, in der sie in den Stack eingefügt wurden, sondern das zuletzt eingefügte Element wird als erstes entfernt. Stacks werden daher zuweilen auch als LIFOWarteschlangen bezeichnet (engl. last in first out).

Algorithmus 1. (Tiefensuche (DFS))
Eingabe: Graph $G=(V,E)$, Startknoten $s \in V$.
Ausgabe: Feld $pred[v]$ mit $v \in V$.
  for all $v \in V$ **do**
    $pred[v] \leftarrow nil$;
    $S \leftarrow$ **new** Stack;

```
    v ← s;
    repeat
      if ∃u ∈ Γ(v)\s mit pred[u] = nil then
        S.Push(v);
        pred[u] ← v;
        v ← u;
      else if not S.IsEmpty() then
        v ← S.Pop();
      else
        v ← nil;
      end if
    until v = nil;
  end for
```

4.2 Algorithmus von Hopcroft und Tarjan

.[5] Mit dem Algorithmus von Hopcroft und Tarjan lässt sich in einem beliebigen zusammenhängenden ungerichteten Graphen ohne Brücken eine Orientierung der Kanten finden, so dass der entstehende gerichtete Graph stark zusammenhängend ist.

Algorithmus 2. .

- Gegeben: zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Brücken.
- Gesucht: Orientierung H von G, so dass H stark zusammenhängend ist.

Der Algorithmus geht in zwei Schritten vor. Zuerst werden die Kanten eines Gerüstes orientiert, das über Tiefensuche bestimmt wird. Anschließend werden die restlichen Kanten orientiert

Es sei

- M die Menge der markierten Knoten,
- NM die Menge der nicht markierten Knoten,
- $m : V \to \mathbb{N}$ die Markierung der Knoten,
- OM die Menge der Bögen, die durch die Orientierung der Kanten von G entstanden sind.

1. Wähle einen beliebigen Knoten $x \in V$ von G aus, der markiert wird. Setze:

$$m(x) = 1;\ M = \{x\};\ NM = V \setminus \{x\};\ OM = \emptyset$$

2. Suche jetzt einen Knoten y aus M, der eine maximale Markierung $m(y)$ besitzt und gleichfalls adjazenz zu einem Knoten z aus NM ist. Markiere jetzt z mit $m(z) = m(y)+1$. Orientiere anschließend die Kante $\{y, z\}$ von y zu z, so dass der Bogen (y, z) entsteht.

Der markierte Knoten z wird aus NM entfernt und zu M hinzugefügt, und der Bogen (y, z) wird zu OM hinzugefügt:

$$M = M \cup \{z\};\; NM = NM \setminus \{z\};\; OM = OM \cup \{(y, z)\}$$

Überprüfe, ob alle Knoten markiert wurden: Gilt $M \neq V$, dann wiederhole Schritt 2.

3. Es gilt:

- Alle Knoten wurden markiert: $M = V$
- ein Gerüst von G ist orientiert.

Es lässt sich beweisen, dass alle Kanten die jetzt noch keine Richtung haben, immer zwei Knoten mit unterschiedlichen Markierungen verbinden. Jede nicht orientierte Kante $\{x, y\}$ mit $m(x) > m(y)$ wird nun von x nach y orientiert, d.h, vom Knoten mit der größeren zum Knoten mit der kleineren Markierung, und zu OM hinzugefügt.

Die auf diese Weise konstruierte Orientierung $H = (V, OM)$ des Graphen G ist stark zusammenhängend.

5 Literatur

Literatur

[1] F. Boesch and R. Tindell.

[2] V. Chvátal and C. Thomassen.

[3] E. Dragoti-Cela. *Skriptum Diskrete Mathematik*, SS 2011.

[4] A. Steger. *Diskrete Strukturen Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[5] Wikipedia. *http://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmus_von_Hopcroft_und_Tarjan*, 2007.