Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B)
Institut für Mathematische Strukturtheorie (Math C)

Proseminar Bakkalaureat TM 502.549 - WS 2010/2011 Optimierung, Graphentheorie und Stochastik

Dr. Eranda Dragoti-Cela und Dr. Franz Lehner

Pflichtfach (aus Wahlkatalog von Proseminaren) im 3. Semester, Bachelorstudium Technische Mathematik

Themenliste:

1. **Orientierungen in Graphen**: Definition, Existenz und Algorithmen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter Graph. Gesucht ist eine Orientierung von G, d.h. eine Zuordnung, die jeder Kante $\{i, j\} \in E$ eine Richtung („von i nach j“) oder „von j nach i“) zuordnet, sodass in dem so orientierten Graphen für jedes Knotenpaar (i, j) sowohl einen gerichteten Weg von i nach j als auch einen gerichteten Weg von j nach i gibt. Wenn G das Straßennetz einer Stadt darstellt, dann stellt eine Orientierung von G ein Einbahnstraßensystem dar, in dem von jedem Punkt aus jeder anderer Punkt erreicht werden kann ohne die Einbahnstraßenresktriktionen zu verletzen.

   Siehe Wikipedia, McHugh [17], S. 150–166.

2. **Das Briefträgerproblem** („chinese postman problem“): Definition, Algorithmen, Anwendungen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter, gewichteter Graph in dem jeder Kante $\{i, j\} \in E$ ein Gewicht c_{ij} zugeordnet wurde. Gesucht ist eine geschlossene Kantenfolge mit minimaler Länge in der jede Kante mindestens einmal vorkommt.

   Siehe Wikipedia, Jungnickel [13], S. 418–422.

3. **Das Bin-Packing-Problem (auch Behälterproblem)**: Definition, on-line- und off-line-Varianten, Approximationsalgorithmen.

   Beim (eindimensionalen klassischen) Bin-Packing-Problem (BPP) geht es darum, eine Menge von gegebenen (eindimensionalen) Gegenständen in der kleintsmöglichen Anzahl von identischen (eindimensionalen) Behältern einzupacken. Dabei ist die Größe von jedem Gegenstand und die Größe der Behälter vorgegeben.

   Aus praktischer Sicht findet das BPP und seine Varianten denkbar viele konkrete Anwendungen. Aus theoretischer Sicht spielt dieses Problem eine besondere Rolle in Optimierung und Algorithmentheorie: die wichtigsten Fragestellungen aus der Approximationstheorie und der Theorie der on-line Algorithmen wurden erstmals anhand des BBP fomuliert und teilweise beantwortet. Eine bekannte Variante des on-line BBP ist auch das Computerspiel Tetris.

   Siehe Korte und Vygen [14] S. 485–492, Burgiel [7], und als weniger anspruchsvolle Einstiegsliteratur
   `http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/ algorithmus/Algorithmen/algo24/algo24.pdf`

4. **Intervallgraphen**: Charakterisierungen, Eigenschaften und Anwendungen.

   Wir betrachten eine endliche Menge $\mathcal{I}$ von geschlossenen Intervallen auf einer Geraden und assoziieren dieser Menge einen einfachen ungerichteten Graphen $G_{\mathcal{I}} = (V_{\mathcal{I}}, E_{\mathcal{I}})$. Die Knotenmenge $V_{\mathcal{I}}$ enthält einen Knoten für jedes Intervall. Eine Kante $\{i, j\}$ ist nur dann vorhanden, wenn die den Knoten i und j entsprechenden Intervalle einen nicht-leeren Schnitt haben. Ein Graph G heißt Intervallgraph, wenn es eine eindliche Menge von Intevallen $\mathcal{I}$ gibt, sodass G und $G_{\mathcal{I}}$ isomorph sind.

Siehe Golumbic [11], S. 171–184.

5. **Unendliche Graphen**: Definitionen, Eigenschaften, das Königslemma und der Satz von Halin.

   Unendliche Graphen sind Graphen mit unendlichen Knoten- und Kantenmengen. Neben vielen Konzepte aus der (endlichen) Graphentheorie werden bei den unendlichen Graphen auch einige Konzepte benötigt, die jene Aspekte der unendlichen Graphen beschreiben, die in endlichen Graphen als solche nicht vorkommen, zB. die *Enden* der unendlichen Pfade. Es gibt zwei Erscheinungen der Unendlichkeit in zusammenhängenden Graphen: die unendliche „Länge“, die durch die Existenz der unendlichen Pfade dargestellt wird, und die unendliche „Breite“, die durch die Existenz vom Knoten unendlichen Grades dargestellt wird. Das Königslemma besagt im Wesentlichen, dass in jedem zusammenhängenden unendlichen Graphen eine dieser zwei Erscheinungen auftreten muss. Die „Kompaktifizierung“, eine der grundlegenden Beweistechniken in der Theorie der unendlichen Graphen, basiert auf das obengenannte Königslemma.

   Siehe Diestel [8], Abschnitte 8.1, 8.3 und 8.5.

6. **Baumzerlegung und Baumweite**: Definitionen, Beispiele, der Satz von Robertson und Seymour.

   Eine *Baumzerlegung* eines Graphen ist eine spezielle Abbildung der Knotenmenge des Graphen auf die Kontenmenge eines Baumes. Dieses Konzept wurde entwickelt mit dem Ziel, gewisse Probleme in Graphen als Probleme in den dazugehöprigen Baumzerlegungen zu formulieren, um diese dann effizient(er) lösen zu können. I.a. ist die Baumzerlegung eines Graphen nicht eindeutig. Die Weite einer Baumzerlegung wird als maximale Kardinalität über die Urbilder aller Baumknoten minus Eins definiert. In vielen Anwendungen wird eine Baumzerlegung mit minimaler Weite gesucht. Diese minimale Weite über alle Baumzerlegungen eines Graphen heißt *Baumweite* des Graphen. Die Baumweite eines Graphen ist ein Maß für die „ähnlichkeit“ des Graphen zu einem Baum. Viele Optimierunngsprobleme, die in beliebigen Graphen (NP-)schwer sind, lassen sich in Graphen mit beschränkter Baumweite effizient lösen.

   Siehe Wikipedia und Deistel [8], S. 315-325.

7. **Knotenfärbung, Kantenfärbung und Listenfärbung in Graphen**: Definitionen, Anwendungen, der Satz von Thomassen und die Listenfärbung-Vermutung.

   Die Listenfärbung ist eine Verallgemeinerung der Knotenfärbung (Kantenfärbung) in dem Farblisten als Teil des Inputs spezifiziert werden, d.h. für jeden Knoten des Graphen wird jene Liste von Farben spezifiziert, die für die Färbung dieses Knoten verwendet werden dürfen. Die Frage lautet ob es eine zulässige Knotenfärbung gibt, die nur Farben aus den vorgegebenen Listen verwendet. G heißt *k-Listen-färbbar* (Englich *k-list-colourable* oder *k-choosable*) falls es für jede Familie von Listen mit jeweils k Farben pro Liste eine zulässige Knotenfärbung mit Farben aus den jeweiligen Listen existiert. Die *Listen-Färbungszahl* von G (Englisch *list chromatic number* oder *choice number*) ist die kleinste natürliche Zahl k, sodass G k-Listen-färbbar ist. Der Satz von Thomassen besagt, dass jeder planarer Graph 5-Listen-färbbar ist. Die Listenfärbung-Vermutung besagt, dass der chromatische Index und der Kanten-Listen-Färbungszahl eines beliebigen Graphen übereinstimmen (während dies für die chromatische Zahl und die Knoten-Listen-Färbungszahl nich stimmt).

   Siehe das (Englische) Wikipedia als erste Einstiegslektüre, Diestel [8], S. 121-125, und Baber [2] für detailliertere Ausführungen inkl. Anwendungen.

8. **Steiner Bäume**: Definition, Anwendungen und (heuristische) Lösungsverfahren.

   Das *Steinerbaumproblem* - ein nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner benanntes Problem im Netzwerk Design - ist eine Verallgemeinerung des minimalen Spannbaumproblems. Beim Steinerbaumproblem sucht man in einem gegebenen einfachen und gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}^+$, einen zusammenhängenden Teilgraphen $G_S = (V_S, E_S)$ mit minimalem Gewicht, welcher eine Menge T vorgegebener Knoten (die sogenannten *Terminale*) miteinander verbindet. Es muss also $T \subseteq V_S$ gelten wobei sich hierbei auch um eine echte Inklusion (also keine zwangsläufige Gleichheit) handeln kann. Ein solcher Teilgraph G_S mit minimalem Gewicht ist zwangsweise ein Baum, der sogenannter *Steinerbaum*. Die Knoten $S = V_S \setminus T$ heißen *Steinerpunkte*.

   Siehe Wikipedia, Krumke und Noltemeier [15], S. 112–115.

9. **Endliche Coxetergruppen**: Definition, einfache Beispiele.

   Eine (endliche) *Coxetergruppe* ist eine endliche, von Reflexionen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte Transformationsgruppe, z.B. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Polygons im $\mathbb{R}^2$. Coxetergruppen haben darüberhinaus schöne algebraische Eigenschaften. Es soll eine kleine Einführung anhand von Kaleidoskopen und Spiegelproblemen gegeben werden.

   Siehe Wikipedia, Goodman [12].

10. **Motzkin-Zahlen**: Definition, Interpretation, Anwendungen.

    Motzkin-Zahlen hängen eng mit den Catalan-Zahlen zusammen.

    Siehe Donaghey/Shapiro [9].

11. **Die schnellste Markovkette**.

    Eine Markovkette auf einem endlichen Graphen hat eine eindeutige

    stationäre Verteilung, gegen die die Markovkette konvergiert. Es soll die am schnellsten konvergierende Markovkette gefunden werden.

    Siehe Boyd/Diaconis/Sun/Xiao [5].

12. **Der Satz von Pick und Ehrhart-Polynome**.

    Der Satz von Pick sagt, daß die Fläche eines ebenen konvexen Polygons mit ganzzahligen Koordinaten durch einfaches Abzählen der ganzzahligen Punkte bestimmt werden kann. Darüberhinaus wird die Anzahl der ganzzahligen Punkte bei "Aufblasen" des Polygons durch ein Polynom beschrieben. Die Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen heißt *Ehrhart-Polynom*. Aufgabe ist es, einen Beweis des Satzes von Pick und ein paar Eigenschaften des Ehrhart-Polynoms zu präsentieren.

    Siehe Beck/Robins [3, Abschnitt 2.6,Kapitel 3].

    Siehe

13. **Der Vierzehnmengensatz von Kuratowski**.

    Ein Satz von Kuratowski besagt, daß die Anzahl der Mengen, die man aus einer beliebigen Teilmenge der reellen Zahlen durch Bilden von Abschlüßen und Komplementen erhalten kann, durch 14 (scharf) begrenzt ist.

    Siehe Sherman [19].

14. **Das Jones-Polynom**.

    Ein *Knoten* ist eine stetige geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$. Zwei Knoten sind *äquivalent*, wenn sie "homotop" (d.h., auf stetige Weise) ineinander übergeführt werden können. Es gibt keinen Algorithmus, um Äquivalenz von Knoten festzustellen, sondern nur unvollständige sogenannte "Invariante". Eine solche Invariante ist das sogenannte *Jones-Polynom*, das einfach zu berechnen ist.

    Das Thema sollte auf zwei Personen aufgeteilt werden.

    Siehe [1, Kapitel 6.1].

15. **Nichtkreuzende Partitionen und Permutationen**.

    Wenn man Permutationen nach der Anzahl der Transpositionen in einer minimalen Faktorisierung sortiert, ergibt sich das Hasse-Diagramm des Verbands der nichtkreuzenden Mengenpartitionen.

    Siehe [16, 4, 6].

16. **Turmpolynome**.

    Sei r_k die Anzahl der Möglichkeiten, k Türme auf einem Schachbrett (d.h., einer Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$) aufzustellen, dann ist $r(x) = \sum r_k x^k$ das *Turmpolynom* (engl. *rook polynomial*) des gegebenen Schachbretts. Es stellt sich heraus, daß das Turmpolynom identisch ist mit einem gewissen dem Schachbrett zugeordneten Graphen.

    Siehe [18, 10].

Bei Bedarf können weitere Themen angeboten werden.

Betreuer: E. Dragoti-Cela für Themen 1 bis 8, F. Lehner für Themen 9 bis 16.

Literatur

[1] Adams, Colin C.: *The knot book.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.

[2] Baber, C.L.: *An introduction to list colorings of graphs.* Master Thesis, Virginia Polytecnic Institute and State University, VA, `http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-06082009-155312/unrestricted/MastersThesis.pdf`, 2009.

[3] Beck, Matthias und Sinai Robins: *Computing the continuous discretely.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007. Integer-point enumeration in polyhedra.

[4] Biane, Philippe: *Some properties of crossings and partitions.* Discrete Math., 175(1-3):41–53, 1997.

[5] Boyd, Stephen, Persi Diaconis, Jun Sun und Lin Xiao: *Fastest mixing Markov chain on a path.* Amer. Math. Monthly, 113(1):70–74, 2006.

[6] Brady, Thomas: *A partial order on the symmetric group and new $K(\pi, 1)$'s for the braid groups.* Adv. Math., 161(1):20–40, 2001.

[7] Burgiel, H.: *How to loose at Tetris.* Technical Report, The Geometry Center, Minneapolis, MN, `www.geom.uiuc.edu/java/tetris/tetris.ps`, 1996.

[8] Diestel, R.: *Graph Theory, Third Edition.* Springer, 2005.

[9] Donaghey, Robert und Louis W. Shapiro: *Motzkin numbers.* J. Combinatorial Theory Ser. A, 23(3):291–301, 1977.

[10] Dunham, J.B.: *Matching Polynomials and the Problem of the Rooks.* Talk, 2007.

[11] Golumbic, M.C.: *Algorithmic graph theory and perfect graphs.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. With a foreword by Claude Berge, Computer Science and Applied Mathematics.

[12] Goodman, R.: *Alice through looking glass after looking glass: the mathematics of mirrors and kaleidoscopes.* Amer. Math. Monthly, 111(4):281–298, 2004.

[13] Jungnickel, D.: *Graphs, networks and algorithms*, Band 5 der Reihe *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Second Auflage, 2005.

[14] Korte, B. und J. Vygen: *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*. Springer, 2008.

[15] Krumke, S.O. und H. Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Teubner, Wiesbaden, 2005.

[16] McCammond, Jon: *Noncrossing partitions in surprising locations*. Amer. Math. Monthly, 113(7):598–610, 2006.

[17] McHugh, J.A.: *Algorithmic Graph Theory*. Prentice Hall International Edititions, New Jersey, 1990.

[18] R.Grimaldi: *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Pearson, 1985, 1999, 2004.

[19] Sherman, David: *Variations on Kuratowski's 14-set theorem*. Amer. Math. Monthly, 117(2):113–123, 2010.