Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B)
Institut für Mathematische Strukturtheorie (Math C)

Proseminar Bakkalaureat TM 502.549 - WS 2009/2010 Optimierung, Graphentheorie und Stochastik

Dr. Eranda Dragoti-Cela und Dr. Franz Lehner

Pflichtfach (aus Wahlkatalog von Proseminaren) im 3. Semester, Bachelorstudium Technische Mathematik

Themenliste:

1. Orientierungen in Graphen: Definition, Existenz und Algorithmen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter Graph. Gesucht ist eine Orientierung von G, d.h. eine Zuordnung, die jeder Kante $\{i, j\} \in E$ eine Richtung („von i nach j“) oder „von j nach i“) zuordnet, sodass in dem so orientierten Graphen für jedes Knotenpaar (i, j) sowohl einen gerichteten Weg von i nach j als auch einen gerichteten Weg von j nach i gibt. Wenn G die Straßen einer Stadt darstellt, dann stellt eine Orientierung von G ein Einbahnstraßensystem dar, in dem von jedem Punkt aus jeder anderer Punkt erreicht werden kann ohne die Einbahnstraßenresktriktionen zu verletzen.

   Siehe Wikipedia, McHugh [12], S. 150–166.

2. Das Briefträgerproblem („chinese postman problem“): Definition, Algorithmen, Anwendungen.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender, ungerichteter, gewichteter Graph in dem jeder Kante $\{i, j\} \in E$ ein Gewicht c_{ij} zugeordnet wurde. Gesucht ist eine geschlossene Kantenfolge mit minimaler Länge in der jede Kante mindestens einmal vorkommt.

   Siehe Wikipedia, Jungnickel [9], S. 418–422.

3. Catalan-Zahlen: Definition, Interpretationen, Anwendungen.

   Die Catalan-Zahlen, benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugéne Charles Catalan, sind eine Folge von natürlichen Zahlen, die in vielen wichtigen Abzählproblemen in der Kombinatorik Anwendung finden.

   Siehe Wikipedia, Aigner [1], S. 101–102, Steger [13], S. 41–45.

4. Intervallgraphen: Charakterisierungen, Eigenschaften und Anwendungen.

   Wir betrachten eine endliche Menge $\mathcal{I}$ von geschlossenen Intervallen auf einer Geraden und assoziieren dieser Menge einen einfachen ungerichteten Graphen $G_{\mathcal{I}} = (V_{\mathcal{I}}, E_{\mathcal{I}})$. Die Knotenmenge $V_{\mathcal{I}}$ enthält einen Knoten für jedes Intervall. Eine Kante $\{i, j\}$ ist nur dann vorhanden, wenn die den Knoten i und j entsprechenden Intervalle einen nicht-leeren Schnitt haben. Ein Graph G heißt Intervallgraph, wenn es eine eindliche Menge von Intevallen $\mathcal{I}$ gibt, sodass G und $G_{\mathcal{I}}$ isomorph sind.

   Siehe Golumbic [7], S. 171–184.

5. Lateinische Quadrate: Diskussion, verwandte Konstruktionen und Anwendungen.

   Ein Lateinisches Quadrat der Größe n ist eine $n \times n$ Tabelle, die pro Zelle eine Zahl aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ enthält, sodass jede Zahl $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ genau einmal in jeder Zeile und in jeder Spalte vorkommt.

   Siehe (Englische) Wikipedia, Bose und Manvel [3], 135–152.

6. Ramsey-Theorie: Diskussion und Beweis des Satzes von Ramsey mit Hilfe der probabilistischen Methode.

Der Satz von Ramsey, benannt nach dem britischen Mathematiker und Logiker Frank Plumpton Ramsey: für jedes Paar von ganzen Zahlen (r, b), $r, b \in \mathbb{Z}$, $r, b \geq 3$, gibt es eine ganze Zahl $R(r, b)$, sodass jede beliebige rot-blau Kantenfärbung des vollständigen Graphen K_n auf $n \geq R(r, b)$ Knoten, entweder einen vollständigen Graphen K_r bestehend ausschließlich aus roten Kanten oder einen vollständigen Graphen K_b bestehend ausschließlich aus blauen Kanten enthält. Die Zahlen $R(r, b)$ heißen *Ramsey-Zahlen* und sind als $R(r, b) = \binom{r+b-2}{r-1}$ gegeben, $r, b \in \mathbb{Z}$, $r, b \geq 3$.

Siehe Wikipedia, Matoušek [11], S. 350–357.

7. Steiner Bäume: Definition, Anwendungen und (heuristische) Lösungsverfahren.

   Das *Steinerbaumproblem* - ein nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner benanntes Problem im Netwerk Design - ist eine Verallgemeinerung des minimalen Spannbaumproblems. Beim Steinerbaumproblem sucht man in einem gegebenen einfachen und gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $c \colon E \to \mathbb{R}^+$, einen zusammenhängenden Teilgraphen $G_S = (V_S, E_S)$ mit minimalem Gewicht, welcher eine Menge T vorgegebener Knoten (die sogenannten *Terminale*) miteinander verbindet. Es muss also $T \subseteq V_S$ gelten wobei sich hierbei auch um eine echte Inklusion (also keine zwangsläufige Gleichheit) handeln kann. Ein solcher Teilgraph G_S mit minimalem Gewicht ist zwangsweise ein Baum, der sogenannter *Steinerbaum*. Die Knoten $S = V_S \setminus T$ heißen *Steinerpunkte*.

   Siehe Wikipedia, Krumke und Noltemeier [10], S. 112–115.

8. Endliche Coxetergruppen: Definition, einfache Beispiele.

   Eine (endliche) *Coxetergruppe* ist eine endliche, von Reflexionen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte Transformationsgruppe, z.B. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Polygons im $\mathbb{R}^2$. Coxetergruppen haben darüberhinaus schöne algebraische Eigenschaften. Es soll eine kleine Einführung anhand von Kaleidoskopen und Spiegelproblemen gegeben werden.

   Siehe Wikipedia, Goodman [8].

9. Motzkin-Zahlen: Definition, Interpretation, Anwendungen.

   Motzkin-Zahlen hängen eng mit den Catalan-Zahlen zusammen.

   Siehe Donaghey/Shapiro [6].

10. Das Lindström-Gessel-Viennot-Prinzip.

    Ein einfaches kombinatorisches Argument erlaubt es, viele Determinanten auszuwerten.

    Siehe Aigner [1, S. 217–228], Aigner/Ziegler [2, S. 167–172]

11. Buffons Nadelproblem: Eine Stecknadel wird auf ein liniertes Blatt Papier fallen gelassen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine Linie berührt.

    Siehe Aigner/Ziegler [2, S. 133–136].

12. Spektrum von Bäumen.

    Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Spektrum und sogenannten Matchings von Bäumen.

    Siehe Cvetković/Doob/Sachs [5, Abschnitt 1.4].

13. Die schnellste Markovkette.

    Eine Markovkette auf einem endlichen Graphen hat eine eindeutige stationäre Verteilung, gegen die die Markovkette konvergiert. Es soll die am schnellsten konvergierende Markovkette gefunden werden.

    Siehe Boyd/Diaconis/Sun/Xiao [4].

14. Die Google Matrix.

    Der Erfolg von Google beruht auf der geschickten Reihung der Suchergebnisse. Dahinter steckt ein einfaches Modell, in dem das Internet als gerichteter Graph betrachtet und darauf eine Markovkette simuliert wird.

    Siehe `http://www.ams.org/featurecolumn/archive/pagerank.html`.

Bei Bedarf können weitere Themen angeboten werden.

Betreuer: Dr. E. Dragoti-Cela für Themen 1 bis 7, F. Lehner für Themen 8 bis 14.

Literatur

[1] Aigner, M.: *A course in enumeration*, Band 238 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.

[2] Aigner, Martin und Günter M. Ziegler: *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 2004. Including illustrations by Karl H. Hofmann.

[3] Bose, R. C. und B. Manvel: *Introduction to combinatorial theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1984.

[4] Boyd, Stephen, Persi Diaconis, Jun Sun und Lin Xiao: *Fastest mixing Markov chain on a path*. Amer. Math. Monthly, 113(1):70–74, 2006.

[5] Cvetković, Dragoš M., Michael Doob und Horst Sachs: *Spectra of graphs*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, Third Auflage, 1995. Theory and applications.

[6] Donaghey, Robert und Louis W. Shapiro: *Motzkin numbers*. J. Combinatorial Theory Ser. A, 23(3):291–301, 1977.

[7] Golumbic, M.C.: *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. With a foreword by Claude Berge, Computer Science and Applied Mathematics.

[8] Goodman, R.: *Alice through looking glass after looking glass: the mathematics of mirrors and kaleidoscopes*. Amer. Math. Monthly, 111(4):281–298, 2004.

[9] Jungnickel, D.: *Graphs, networks and algorithms*, Band 5 der Reihe *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Second Auflage, 2005.

[10] Krumke, S.O. und H. Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. Teubner, Wiesbaden, 2005.

[11] Matoušek, J.: *Diskrete Mathematik: eine Entdeckungsreise*. Springer, 2007.

[12] McHugh, J.A.: *Algorithmic Graph Theory*. Prentice Hall International Edititions, New Jersey, 1990.

[13] Steger, A.: *Diskrete Strukturen, Band 1, Kombinatorik, Graphentheorie und Algebra*. Springer, 2. Auflage, 2007.