Optimierung in der Finanzmathematik SS 2017

3. Übungsblatt

13. (Ein Standortproblem)

a) Betrachten Sie den Fall einer Firma, die Schecks aus mehreren Geschäftsfilialen bekommt. Die Zeitspanne zwischen der Bezahlung eines Schecks und dessen Verrechnung hängt von der Paarung (Geschäftsfiliale,Verrechnungsstelle) ab. Selbst wenn diese Zeitspanne nur wenige Tage beträgt, so entsteht bei großen Geschäftsvolumina ein zinssatz- oder reinvestitionsbedingter Verlust für der Firma. Wenn zB. von der Geschäftsfiliale A Schecks in Wert von B in die Verrechnungsstelle C zur Verrechnung geschickt werden und die Zeitspanne zwischen erfolgtem Geschäft und Verrechnung zwei Tage beträgt, dann schreibt die Firma einen Verlust von pB, wobei p der tägliche Zinssatz oder die Reinvestitionsrate ist. Die Firma erwägt daher die Eröffnung von Verrechnungsstellen an manchen Geschäftsfilialen (Engl. *lockboxes*), sodass die obenen beschriebenen Verluste minimiert werden. Jede Geschäftsfiliale wird nun einer Verrechnungsstelle zugeordnet, die alle Schecks aus dieser Geschäftsfiliale bearbeitet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Eröffnung einer Verrechnungsstelle in Geschäftsfiliale j mit fixen Investitionskosten f_j einhergeht. Die Bearbeitungskosten c_{ij} pro Scheck hängen von der Filialstelle i, die den Scheck entgegen genommen hat, und der Verrechnungsstelle j, die den Scheck bearbeitet. Weiters wird angenommen, dass die Zeitspannen zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale i und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle j für alle Paare $i, j = 1, 2, \ldots, n$ bekannt sind. Auch die Reinvestitionsrate p sei bekannt. Formulieren Sie dieses Problem als (gemischt)-ganzzahliges lineares Programm.

(b) Betrachten Sie eine Variante des Problems in dem es keine fixen Eröffnungskosten für die Verrechnungstellen gibt, sondern nur Kosten für Zordnung der Geschäftsfilialen zu den Verrechnungsstellen: seien α_{ij} die Zuordnungskosten der Geschäftsfiliale i zur Verrechnungsstelle j, für alle Filialen i, $1 \leq i \leq n$, und für alle möglichen Verrechnungsstellen j, $1 \leq j \leq n$. Es wird angenommen, dass in den Koeffiezienten α_{ij} alle anderen Kosten eingepreist sind (zB. Zinssätze, Anzahl der zu bearbeitenden Checks in den Filialen, Sendezeiten u.s.w.). Es wird angenommen, dass genau q Verrechnungsstellen betrieben werden sollen, für ein gegebenes q mit $1 \leq q \leq n$. Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem um die optimalen zu betreibenden Verrechnungsstellen zu bestimmen, sodass die Gesamtkosten der Zuordnung jeder Geschäftsfiliale zu einer in Betrieb genommenen Verrechnungstelle minimiert werden.

(c) Geben Sie zwei Alternativen für die Fomulierung folgender Restriktion an: Die Geschäftsfilialen können Schecks nur zu betriebsbereiten Verrechnungsstellen senden.

(d) Lösen und vergleichen sie die LP-Relaxationen der zwei oben genannten Formulierungen des Problems aus (b) für $q = 2$ und

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Betrachten Sie das untenstehende ganzzahlige lineare Problem (ILP)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 \\ \text{udNb} & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1 , x_2 \geq 0 \\ & x_1 , x_2 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines *Branch and Bound* Ansatzes unter Verwendung von

(a) *simple Branching* vs. *strong Branching* für die Auswahl des Variable x_j an der verzweigt wird.

(b) *first in first out* vs. *last in first out* für die Auswahl des zu untersuchenden Knoten des Branch and Bound Baums.

Vergleichen die Größen der resultierenden *Branch and Bound* Bäume.

15. Überzeugen Sie sich mit Hilfe des untenstehenden Problems, dass das Auf- und Abrunden der Optimallösung der linearen Relaxation eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms nicht notwendigerweise eine zulässige Lösung desselben liefert.

$$\begin{array}{ll} \max & 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 \\ \text{udNb} & \\ & 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ & 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 20 \\ & x_1 , x_2 \, x_3 \geq 0 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

16. Angenommen Sie können 250000,00 Euro in einem der folgenden fünf Projekte mit den angegebenen Cash-Flows investieren.

	1. *Jahr*	2. *Jahr*	3. *Jahr*	4. *Jahr*
1. *Projekt*	$-1,00$		1.18	
2. *Projekt*		$-1,00$		1.22
3. *Projekt*			-1	1.10
4. *Projekt*	$-1,00$	$0,14$	$0,14$	1.00
5. *Projekt*		$-1,00$	$0,20$	1.00

Wenn Sie z.B. am Anfang des 1. Jahres 1 Euro im 1. Projekt investieren, dann erhalten Sie 1,18 Euro zu Beginn des 3. Jahres. Die minimale Investitionsgrenze ist 100000,00 Euro pro Projekt. Zu Jahresbeginn kann der gesamte Geldbetrag eines jeden Projekts in einem Cash-Account mit jährlichen Zinsen von 3% investiert werden. Formulieren Sie ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem um einen Investitionsplan zu bestimmen, der den verfügbaren Geldbetrag zu Beginn des 4. Jahres maximiert. Lösen Sie dieses Problem mit einem Solver ihrer Wahl.

17. Angenommen Sie halten ein Portfolio P bestehend aus 8 Positionen mit den in der untenstehenden Tabelle gegebenen Gewichten. Es wird weiters angenommen, dass das Markowitz'sche Optimierungsproblem gelöst wurde um ein sogenanntes *mean-variance* (M/V) Portfolio zu bestimmen, dessen Gewichte ebenfalls in der untenstehenden Tabelle angegeben sind.

Position	A	B	C	D	E	F	G	H
Portfolio P	0,12	0,15	0,13	0,10	0,20	0,10	0,12	0,08
M/V Portfolio	0,02	0,05	0,25	0,06	0,18	0,10	0,22	0,12

Tabelle 1: Data for Beispiel 17

Sie möchten Ihr Porftolio so umschichten, dass es ähnlicher zum M/V Portfolio wird. Andererseits wollen Sie hohe Transaktionskosten vermeinden und beschließen daher nur drei Positionen im Portfolio umzuschichten. Seien x_i die Gewichte im umgeschichteten Portfolio. Das Ziel ist es folgende Summe zu minimieren

$$|x_1 - 0,02| + |x_2 - 0,05| + |x_3 - 0,25| + \ldots + |x_8 - 0,12|\,,$$

die ein Maß für die Ähnlichkeit des umgeschichteten Portfolios mit dem M/V Portfolio darstellt.

Formulieren Sie dieses Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm und lösen Sie es mit einem Solver Ihrer Wahl.

18. Betrachten Sie ein *Mean-Variance* Portfolio bestehend aus 8 Aktienindizes `S&P 500`, `NASDAQ Composite`, `FTSE 100`, `Euro Stoxx 50`, `Nikkei 225`, `Dow Jones Industrial Average`, `Russell 2000` and `DAX`. Angenommen Sie wollen ein Portfolio zusammenstellen, dass in höchtens 5 Positionen investiert ist, in jeder Position nicht mehr als 30% des Kapitals investiert, einen vorgegebenen erwarteten monatlichen Ertrag nicht unterschreitet und die Varianz des monatliches Portfolioertrags minimiert.

    Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines *Branch-and-Bound* Verfahrens bei dem in jedem Knoten des *Branch-and-Bound* Baumes ein konvexes quadratisches Optimierungsproblem gelöst werden muss. Diese quadratischen Probleme können Sie mit einem Solver ihrer Wahl lösen. Als Inputdaten sollen die adjustierten monatlichen Schlusskurse der acht Positionen (`adjClose`[1]) für den Zeitraum Jänner 2003-Dezember 2008 dienen; diese Daten können etwa aus `finance.yahoo.com` heruntergeladen werden.

19. Betrachten Sie folgendes Investitionsproblem. Das Investitionsbudget für die Projekte P_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, beträgt 14000 €. Seien c_i, p_i, die Kosten bzw. der Nutzen von Projekt i, für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Teilinvestitionen sind nicht möglich, d.h. entweder wird in einem Projekt das gesamte nötige Büdget investiert oder das Projekt wird gar nicht durchgeführt. Das Ziel ist, ein Investitionsplan zu ermitteln, der entscheidet in welche Projekte investiert werden soll, sodass der Gesamtnutzen der Investition bei Einhaltung der Budgetrestriktionen maximiert wird. Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines *Branch and Bound* Ansatzes für $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (7000, 5000, 4000, 3000)$ und $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (11000, 8000, 6000, 4000)$. (Die Kosten- und Nutzenangaben sind in €.)

[1] Das sind bzgl. Dividende und Splits adjustierte Schlusskurse