Optimierung in der Finanzmathematik SS 2017

2. Übungsblatt

7. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir berücksichtigen stets zwei Szenarien: a) es gibt keine oberen Schranken für die Anteile der Investition pro Aktie, und b) Es gibt eine obere Investitionsschranke von 40% pro Aktie. Leer Verkäufe sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	1.10	0.93	0.62	0.74	-0.23	4.9
2		1.60	0.22	0.56	0.26	10.1
3			1.80	0.78	0.27	12.5
4				1.90	-0.56	8.9
5					2.20	14.7

(i) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem (LP) zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}$ jeweils für beide Szenarien (a) und (b). Welche Varianz hat das optimale Portfolio?

(ii) Formulieren Sie ein quadratisches Optimierungsproblem (QP) zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP und bestimmen Sie somit die minimale Portfoliovarianz für jedes der beiden Szenarien. Welchen Ertrag $r_{\min}$ hat das optimale Portfolio in jedem Szenario?

(iii) Lösen Sie das Problem (1) für jedes der zwei Szenarien, für 20 unterschiedliche Werte r, die die Knoten eines uniformen Gitters auf $[r_{\min}, r_{\max}]$ drastellen. Mit $\mathcal{X}$ wird die jeweilige Menge der zulässigen Portfolios in jedem Szenario bezeichnet.

$$\begin{array}{ll} \min & x^T \Sigma x \\ udNB & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{1}$$

Skizzieren und vergleichen Sie dann die *Effizienzfronten* (oder *Pareto-Fronten*) der beiden Szenarien.

8. Wir betrachten Portfolios bestehend aus vier Positionen: dem Aktienindex `S&P 500`, dem Aktienindex `NASDAQ Composite`, der Anleihe `iShares 7-10 Years Treasury Bond`, und dem Investmentfonds `Deutsche Gold & Precious Metals A`. Das Portfoliogewicht von jedem Asset darf 0.3 nicht überschreiten, die Summe der Portfoliogewichte muss 1 betragen und *Leerverkäufe* (*short selling*) sind nicht erlaubt. Als Inputdaten sollen die adjustierten monatlichen Schlusskurse der vier Positionen (`adjClose`[1]) für den Zeitraum Jänner 2010-Dezember 2016 dienen; diese Daten können etwa aus `finance.yahoo.com` heruntergeladen werden.

(a) Berechnen Sie den minimalen erwarteten Ertrag $r_{\min}$ und den maximalen erwarteten Ertrag $r_{\max}$ der oben genannten Portfolios. Bestimmen Sie für diese Portfolios die Effizienzfront in dem Sie auf das Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ ein uniformes Gitter mit 21 Knoten (19 innere Knoten) legen und für jeden Gitterpunkt das Minimum-Varianzproblem bei vordefiniertem zu erreichenden erwarteten Ertrag (siehe Vorlesung) lösen. Führen Sie diese Berechnungen jeweils zweimal durch: als empirischer Schätzer für den erwarteten monatlichen relativen Ertrag eines Assets soll einmal das arithmetische Mittel und das andere Mal das geometrische Mittel der entsprechenden Zeitreihe dienen. Vergleichen Sie die Effizienzfronten in den beiden Berechnungsmodi.

[1] Das sind bzgl. Dividende und Splits adjustierte Schlusskurse

(b) Formulieren Sie das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem als quadratisches Optimierungsproblem und lösen Sie es unter der Annahme, dass der risikoloser Ertrag 0.3% beträgt. Seien r_{SR} und σ_{SR} der erwarteter Ertrag bzw. die Varianz des Portfolios, das den Sharpe-Ratio maximiert. Verifizieren Sie, dass die Kapitalallokationslinie (CAL), die durch den Punkt $(\mu_{\text{SR}}, \sigma_{\text{SR}})$ verläuft, tatsächlich eine Tangente der Effizienzfront darstellt. Auch hier sollen die Berechnungen zweimal durchgeführt werden, jeweils mit den arithmetischen bzw. geometrischen Mitteln als Schätzer für die erwarteten monatlichen relativen Erträge der einzelnen Assets. Vergleichen Sie die Ergebnisse in den beiden Berechnungsmodi.

9. Bestimmen Sie die Effizienzfront für die Portfolios aus Übungsbeispiel 8 unter Berücksichtigung folgender Erwartungen (neben den historischen Daten):

   (a) Der monatliche erwartete Ertrag des Nasdaq Composite Index (NC) wird um 7% höher als der erwartete Ertrag des S&P 500 Index (S&P500) ausfallen.

   (b) Der durchschnittliche monatliche erwartete Ertrag von NC und S&P500 wird um 5% höher als der erwartete Ertrag des iShares 7-10 Years Treasury Bonds ausfallen.

   Diese Erwartungen werden mit großer Zuversicht vertreten; setze $\omega_1 = \omega_2 = 0,0001$ (siehe Vorlesung). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den jeweiligen Ergebnissen aus Beispiel 8.

10. Betrachten Sie die vier Assets aus Übungsbeispiel 8. Angenommen Sie halten ein Portfolio, das gleichmäßig auf die vier Assets investiert ist, d.g. der Vektor x der Portfoliogewichte ist $x^T = (0,25; 0,25; 0,25; 0,25)$.

    (a) Reoptimieren Sie das Portfolio unter Berücksichtigung von sogenannten „turn-over constraints" unter einer vorgegeben Mindestgrenze r für den erwarteten Gesamtportfolioertrag. Verwenden Sie das geometrische Mittel der jewieligen Zeitreihe als Schätzer für die erwarteten jährlichen Erträge der einzelnen Assets und setzen Sie $r = (r_{\text{min}} + r_{\text{max}})/2$, vgl. Übungsbeispiel 8. Variieren Sie die Turnover-Grenze h zwischen 10% und 100%, vergleichen Sie die resultierenden optimalen Portfolios unter einander, und interpretieren Sie die Ergebnisse.

    (b) Reoptimieren Sie das Portfolio unter Berücksichtigung von Transaktionskosten, die linear vom gehandelten Betrag abhängen. Der Koeffizient dieser linearen Anhängig sei t, unabhängig vom gehandelten Asset und auch unabhängig davon, ob verkauft oder gekauft wird. Verwenden Sie wie in Punkt (a) das geometrische Mittel der jeweiligen Zeitreihe als Schätzer für die erwarteten jährlichen Erträge der einzelnen Assets und setzen Sie $r = (r_{\text{min}} + r_{\text{max}})/2$, vgl. Übungsbeispiel 8. Lassen Sie t zwischen 5 und 35 Basispunkten mit einer Schritgröße von einem Basispunkt variieren und vergleichen Sie die jeweils resultierenden optimalen Portfolios. Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

11. Betrachten Sie die Daten aus Übungsbeispiel 8 und stellen Sie ein Portfoliooptimierungsproblem unter Verwendung der durschnittlichen absoluten Abweichung als Risikomaß, d.h. dem MAD Modell von Konno und Yamazaki entsprechen, auf (vgl. Vorlesung). Als Schätzer für die erwarteten monatlichen Erträge der einzelnen Assets sollten die geometrischen Mittel der jeweiligen Zeitreihen verwendet werden. Sei r eine Mindestgrenze für den erwarteten monatlichen Gesamtportfolioertrag. Bestimmen Sie r_{min} und r_{max} wie in Übungsbeispiel 8. Legen Sie auf das Intervall $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$ ein uniformes Gitter 21 Knoten (19 innere Knoten) und berechnen Sie das optimale MAD Portfolio für jeden Gitterpunkt r. Tragen Sie die optimalen Portfolios in eine Effizienzfront auf, analysiseren Sie die Ergebnisse und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus Übungsbeispiel 8.

12. Klassifikationsprobleme.

    Es wird angenommen, dass unterschiedliche Einheiten nach gewisssen Eigenschaften klassifiziert werden sollen. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw. klassifiziert werden sollen (zB. in Wachstum-Aktien („growth stocks") und Wert-Aktien („value stocks")). In der Regel erhält man zunächst eine sogenannte *Training Menge* von Einheiten, für die sowohl die Realisierungen aller relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Bei der linearen Separationsproblem wird in zwei Klassen klassifiziert und es werden Hyperebenen (etwa mit Normalvektor w und freiem Koeffizient y) gesucht, die die Klassen so separieren, dass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x einer Klasse und $w^t y \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten y der anderen Klasse. Hierbei sind x (y) Vektoren, die die Realisierungen der einzelnen für die Klassifikation maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellen. Falls ein Vektor w und ein Skalar γ mit den obigen Eigenschaften existieren, sagt man, dass die zwei Klassen der Training Menge *linear separierbar* sind. Die Hyperebenen $w^t x = \gamma - 1$ und $w^t x = \gamma + 1$ heißen *separierende Hyperebenen*. Es ist oft erwünscht, dass der Euklidische Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen, der sogenannte *margin*, maximiert wird.

Nachdem die separierenden Hyperebenen anhand der Training Menge gefunden wurden, ist die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$ zu treffen, wobei x, wie oben beschrieben, die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellt.

(a) Formulieren Sie das Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ, so, dass der Abstand zwischen den sparierenden Hyperebenen maximiert wird, als quadratisches Optimierungsproblem.

(b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die zwei Klassen der Training Menge nicht linear separierbar sind. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann jedoch so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und anhand von nicht-negativen Variablen modelliert werden. Die Zielfunktion soll dann so aufgesetzt werden, dass (a) der Abstand zwischen den zwei *quasi-separierenden* Hyperebenen maximiert wird, und (b) die Summe der Verletzungen der Separationsbedingungen minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem unf führen Sie einen Steuerungsparameter ein, der die relative Gewichtung der beiden Ziele (a) und (b) in der zusammengesetzten Zielfunktion steuert.

(c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen nicht anhand der euklidischen Norm sondern anhand der ∞-Norm ($||(a_i)||_\infty := \max_i\{|a_i|\}$) gemessen wird. Lässt sich dieses Separationsproblem als lineares Optimierungsproblem formulieren?