Optimierung in der Finanzmathematik SS 2015

2. Übungsblatt

7. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir betrachten stets zwei Szenarien: a) es gibt keine oberen Schranken für die Anteile der Investition pro Asset b) Es gibt eine obere Investitionsschranke von 35% pro Asset. Leer Verkäufe sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	2.30	0.93	0.62	0.74	-0.23	15.1
2		1.40	0.22	0.56	0.26	12.5
3			1.80	0.78	0.27	14.7
4				3.40	-0.56	9.02
5					2.60	17.68

(i) Formulieren Sie ein lineares Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}$ für beide Szenarien (a) und (b). Velche Varianz hat das optimale Portfolio?

(ii) Formulieren Sie ein quadratisches Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP und bestimmen Sie somit die minimale erwartete Portfoliovarianz in beiden Szenarien. Welchen Ertrag $r_{\min}$ hat das optimale Portfolio in jedem Szenario?

(iii) Lösen Sie das Problem (1) für beide Szenarien, für unterschiedliche Werte r zwischen den jeweiligen $r_{\min}$ und $r_{\max}$.

$$\begin{array}{ll} \min & x^T \Sigma x \\ udNB & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{1}$$

Skizzieren und vergleichen Sie dann die *Effizienzfronten* (oder *Pareto-Fronten*) der beiden Szenarien.

8. Wir betrachten Portfolios bestehend aus vier Positionen: der S&P 500 Index (S&P500), der 10- Year Treasury Bond Index (10TB), der Nasdaq Composite Index (NC) und eine Cash position (MM). Das Portfoliogewicht von jedem Asset darf 0.4 nicht überschreiten, die Summe der Portfoliogewichte muss 1 betragen und *Leerverkäufe* (*short selling*) sind nicht erlaubt. Die absoluten jährlichen Erträge der vier Positionen sind für den Zeitraum 1960-2003 in der untenstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	**S&P500**	**10TB**	**NC**	**MM**	**Jahr**	**S&P500**	**10TB**	**NC**	**MM**
1960	20.2553	262.935	34.461	100.00	1982	115.308	777.332	232.41	440.68
1961	25.6860	268.730	45.373	102.33	1983	141.316	787.357	278.60	482.42
1962	23.4297	284.090	38.556	105.33	1984	150.181	907.712	247.35	522.84
1963	28.7463	289.162	46.439	108.89	1985	197.829	1200.63	324.39	566.08
1964	33.4484	299.894	57.175	113.08	1986	234.755	1469.45	348.81	605.20
1965	37.5813	302.695	66.982	117.97	1987	247.080	1424.91	330.47	646.17
1966	33.7839	318.197	63.934	124.34	1988	288.116	1522.40	381.38	702.77
1967	41.8725	309.103	80.935	129.94	1989	379.409	1804.63	454.82	762.16
1968	46.4795	316.051	101.79	137.77	1990	367.636	1944.25	373.84	817.87
1969	42.5448	298.249	99.389	150.12	1991	479.633	2320.64	586.34	854.10
1970	44.2212	354.671	89.607	157.48	1992	516.178	2490.97	676.95	879.04
1971	50.5451	394.532	114.12	164.00	1993	568.202	2816.40	776.80	905.06
1972	60.1461	403.942	133.73	172.74	1994	575.705	2610.12	751.96	954.39
1973	51.3114	417.252	92.190	189.93	1995	792.042	3287.27	1052.1	1007.84
1974	37.7306	433.927	59.820	206.13	1996	973.897	3291.58	1291.0	1061.15
1975	51.7772	457.885	77.620	216.85	1997	1298.82	3687.33	1570.3	1119.51
1976	64.1559	529.141	97.880	226.93	1998	1670.01	4220.24	2192.7	1171.91
1977	59.5739	531.144	105.05	241.82	1999	2021.40	3903.31	4069.3	1234.02
1978	63.4884	524.435	117.98	266.07	2000	1837.36	4575.33	2470.5	1313.00
1979	75.3032	531.040	151.14	302.74	2001	1618.98	4827.26	1950.4	1336.89
1980	99.7795	517.860	202.34	359.96	2002	1261.18	5558.40	1335.5	1353.47
1981	94.8671	538.769	195.84	404.48	2003	1622.94	5588.19	2003.4	1366.73

(a) Berechnen Sie den minimalen erwarteten Ertrag $r_{\min}$ und den maximalen erwarteten Ertrag $r_{\max}$ der oben genannten Portfolios. Bestimmen Sie für diese Portfolios die Effizienzfront in dem Sie auf das Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ ein Gitter mit Schrittgröße 0.5 legen und für jeden Gitterpunkt das Minimum-Varianzproblem bei vordefiniertem zu erreichenden erwarteten Ertrag (siehe Vorlesung) lösen. Führen Sie diese Berechnungen jeweils zweimal durch: al empirischer Schätzer für den erwarteten jährlichen relativen Ertrag eines Assets soll einmal das arithmetische Mittel und das andere Malm das geometrische Mittel der entsprechenden Zeitreihe. Vergleichen Sie die Effizienzfronten in den beiden Berechnungsmodi.

(b) Lösen Sie das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem für das Portfolio aus Übungsbeispiel 8 unter der Annahme, dass der risikoloser Ertrag 3% beträgt. Seien r_{SR} und σ_{SR} der erwarteter Ertrag bzw. die Varianz des Portfolios, das den Sharpe-Ratio maximiert. Verifizieren Sie, dass die Kapitalallokationslinie (CAL), die durch den Punkt $(\mu_{\text{SR}}, \sigma_{\text{SR}})$ verläuft, tatsächlich eine Tangente des Efficient Frontier darstellt. Auch hier sollen die Berechnungen zweimal durchgeführt werden, jeweils mit den arithmetischen bzw. geometrischen Mittel als Schätzer für die erwarteten jährlichen relativen Ertrag der einzelnen Assets. Vergleichen Sie die Ergebnisse in den beiden Berechnungsmodi.

9. Bestimmen Sie die optimale Zusammensetzung des Portfolios aus Übungsbeispiel 8 unter Berücksichtigung folgender Erwartungen neben den historischen Daten:

   (a) Der erwartete Ertrag des Nasdaq Composite Index (NC) wird um 4% höher als der erwartete Ertrag des S&P 500 Index (S&P500) ausfallen.

   (b) Der durchschnittliche erwartete Ertrag von NC und S&P500 wird um 3% höher als der erwartete Ertrag der 10-Year Treasury Bond Index ausfallen.

   Diese Erwartungen werden mit großer Zuversicht vertreten; setze $\omega_1 = \omega_2 = 0,0001$ (siehe Vorlesung).

10. Betrachten Sie die vier Assets aus Übungsbeispiel 8. Angenommen Sie halten ein Portfolio, das gleichmäßig auf die vier Assets investiert ist, d.g. der Vektor x der Portfoliogewichte ist $x^T = (0,25; 0,25; 0,25; 0,25)$.

(a) Reoptimieren Sie das Portfolio unter Berücksichtigung von sogenannten „turnover constraints“ unter einer vorgegeben Mindestgrenze r für den erwarteten Gesamtportfolioertrag. Verwenden Sie das geometrische Mittel der jewieligen Zeitreihe als Schätzer für die erwarteten jährlichen Erträge der einzelnen Assets und setzen Sie $r = r_{\text{min}} + r_{\text{max}}$, vgl. Übungsbeispiel8. Variieren Sie die Turnover-Grenze h zwischen 10% und 100%, vergleichen Sie die resultierenden optimalen Portfolio unter einander, und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(b) Reoptimieren Sie das Portfolio unter Berücksichtigung von Transaktionskosten, die linear vom gehandelten Betrag abhängen. Der Koeffizient dieser linearen Anhängig sei t, unabhängig vom gehandelten Asset und auch unabhängig davon, ob verkauft oder gekauft wird. Verwenden Sie wie in Punkt (a) das geometrische Mittel der jewieligen Zeitreihe als Schätzer für die erwarteten jährlichen Erträge der einzelnen Assets und setzen Sie $r = r_{\text{min}} + r_{\text{max}}$, vgl. Übungsbeispiel8. Lassen Sie t zwischen 5 Basispunkt und 30 Basispunkten mit einer Schritgröße von einem Basispunkt variieren und vergleichen Sie die jeweils resultierenden optimalen Portfolios. Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

11. Betrachten Sie die Daten aus Übungsbeispiel 8 und stellen Sie ein Portfoliooptimierungsproblem unter Verwendung der durschnittlichen absoluten Abweichung als Risikomaß, d.h. dem MAD Modell von Konno und Yamazaki entsprechend auf (vgl. Vorlesung). Als Schätzer für die erwarteten jährlichen Erträge der einzelnen Assets sollten die geometrischen Mittel der jeweiligen Zeitreihen verwendet werden. Sei r eine Mindestgrenze für den erwarteten jährlichen Gesamtportfolioertrag. Bestimmen Sie r_{min} und r_{max} wie in Übungsbeispiel 8. Legen Sie auf das Intervall $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$ ein Gitter mit Schrittgröße 0.5 und berechnen Sie das optimale MAD Portfolio für jeden Gitterpunkt r. Tragen Sie die optimalen Portfolios in eine Effizienzfront auf und analysiseren Sie die Ergebnisse.

12. Klassifikationsprobleme.

Es wird angenommen, dass unterschiedliche Einheiten nach gewisssen Eigenschaften klassifiziert werden sollen. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw., in Wachstum-Aktien („growth stocks“) und Wert-Aktien („value stocks“) klassifiziert werden sollen. In der Regel erhält man zunächst eine sogenannte *Training Menge* von Einheiten, für die sowohl alle relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Bei der linearen Separationsproblem wird in zwei Klassen klassifiziert und es werden Hyperebenen gesucht, die die Klassen so separieren, dass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x einer Klasse und $w^t y \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten y der anderen Klasse. Hierbei sind x (y) Vektoren, die die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellen. Falls ein Vektor w und ein Skalar γ mit den obigen Eigenschaften existieren, sagt man, dass die zwei Klassen der Training Menge *linear separierbar* sind. Die Hyperebenen $w^t x = \gamma - 1$ und $w^t x = \gamma + 1$ heißen *separierende Hyperebenen*. Es ist oft erwünscht, dass der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen, der sogenannte *margin*, maximiert wird.

Nachdem die separierenden Hyperebenen anhand der Training Menge gefunden wurden, ist die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$ zu treffen, wobei x, wie oben beschrieben, die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellt.

(a) Formulieren Sie das Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ, so, dass der Abstand zwischen den sparierenden Hyperebenen maximiert wird, als quadratisches Optimierungsproblem.

(b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die zwei Klassen der Training Menge nicht linear separierbar sind. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann jedoch so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und anhand von nicht-negativen Variablen modelliert werden. Die Zielfunktion soll dann so aufgesetzt werden, dass (a) der Abstand zwischen den zwei quasi-separierenden Hyperebenen maximiert und (b) die Summe der Verletzungen der Separationsbedingungen minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem unf führen Sie einen Steuerungsparameter ein, der die relative Gewichtung der beiden Ziele (a) und (b) in der zusammengesetzten Zielfunktion steuert.

(c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen nicht anhand der euklidischen Norm sondern anhand der ∞-Norm ($||(a_i)||_\infty := \max\{|a_i|\}$) gemessen wird. Lässt sich dieses Separationsproblem als lineares Optimierungsproblem formulieren?