Optimierung 1 SS 2017

9. Übungsblatt

61. Führen Sie eine Iteration der pfadverfolgenden Methode (vgl. Vorlesung) durch für das untenstehende lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{unter} & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1\,, & x_2 & \geq & 0\,.
\end{array}$$

Starten Sie mit dem Vektor $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$, wobei e einen Vektor mit passender Dimension und allen Einträgen gleich Eins bezeichnet. Setzten Sie die Steuerungsparameter wie folgt: $\delta = 1/10$, $r = 9/10$. (Beachten Sie, dass das Verfahren im allgemeinen *nicht zwangsweise* mit einem Paar von *zulässigen* primalen und dualen Lösungen starten muss. Wie sieht der nach dieser Iteration aktualisierte Vektor (x, w, y, z) aus?

62. Sei $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) \colon \mu > 0\}$ der zentraler Pfad (vgl. Vorlesung).

    (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{\mu\to\infty}(b^T y_\mu - c^T x_\mu) = \infty$
    (Hinweis: Nutzen Sie die Gleichung $\mu(n+m) = x_\mu^T z_\mu + w_\mu^T y_\mu$.)

    (b) Verwenden Sie das Ergebniss aus (a) um folgende Aussage zu beweisen: Wenn ein lineares Programm ein nicht leeres Inneres besitzt und eine beschränkte Menge von zulässigen Lösungen hat, dann ist die Menge der zulässigen Lösungen des zugehörigen dualen Problems unbeschränkt.

63. (Skalierungsinvarianz)

    Betrachten Sie ein primal-duales Paar von linaren Programmen P und D wie folgt

$$(P)\ \max\{c^T x \colon Ax + w = b\,, x, w \geq 0\} \text{ und } (D)\ \min\{b^T y \colon A^T y - z = c\,, y, z \geq 0\}\,.$$

Seien R und S zwei Diagonalmatrizen mit jeweils positiven Einträgen auf der Diagonale. Betrachten Sie die skalierten Reformulierungen $\bar{P}$ bzw. $\bar{D}$ der ursprünglichen Probleme wie folgt:

$$(\bar{P})\ \max\{(Sc)^T \bar{x} \colon RAS\bar{x} + \bar{w} = Rb\,, \bar{x}, \bar{w} \geq 0\} \text{ und } (\bar{D})\ \min\{(Rb)^T y \colon SA^T R\bar{y} - \bar{z} = Sc\,, \bar{y}, \bar{z} \geq 0\}\,.$$

Sei (x^k, w^k, y^k, z^k) die Folge der von der pfadverfolgenden Methode generiertzen Vektoren, angewandt auf das Problempaar P und D. Analog sei $(\bar{x}^k, \bar{w}^k, \bar{y}^k, \bar{z}^k)$ die Folge der von der pfadverfolgenden Methode generierten Vektoren, angewandt auf das Problempaar $\bar{P}$ und $\bar{D}$. Es wird angenommen, dass die jeweiligen Startvektoren folgende Gleichungen erfüllen:

$$\bar{x}^0 = S^{-1}x^0\,, \bar{w}^0 = Rw^0\,, \bar{y}^0 = R^{-1}y^0\,, \bar{z}^0 = Sz^0\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Relationen im Laufe des Verfahrens erhalten bleiben, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt(D)

$$\bar{x}^k = S^{-1}x^k\,, \bar{w}^k = Rw^k\,, \bar{y}^k = R^{-1}y^k\,, \bar{z}^k = Sz^k\,.$$

64. (Das lineare Komplementaritätsproblem (lKOP))

Sei $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $q \in \mathbb{R}^k$ und $k \in \mathbb{N}$. Das lineare Komplementaritätsproblem (lKoP) mit Input M, q besteht in der Bestimmung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^k$, der folgende Gleichungen erfüllt: $-Mx + z = q$, $XZe = 0$ und $x, z \geq 0$. Hier sind X und Z Diagonalmatrizen mit den Vektoren x bzw. z in der Diagonale, und $e \in \mathbb{R}^k$ ein Vektor mit allen Einträgen gleich Eins. (Beachten Sie, dass die erste Gleichung als Definition des Vektors z dienen kann, somit ist die Lösung des lKoP eindeutig durch x definiert).

(a) Zeigen Sie, dass die Komplementaritätsbedingungen für primal-duale Paare von linearen Programmen als lienares Komplementaritätsproblem dargestellt werden können. Wie sieht der Input dieses lKoP (im Bezug auf die Inputs der linearen Programme) aus?

(b) Die pfadverfolgende Methode kann auch zur Lösung des lKoP verwendet werden. Der wesentlicher Schritt ist das Ersetzen der Komplementaritätsgleichung $XZe = 0$ durch eine μ-Komplementaritätsgleichung $XZe = \mu e$ um dann einen Richtungsvektor $(\Delta x, \Delta z)$ mit Hilfe eines Newton-Schrittes zu bestimmen. Arbeiten Sie die Einzelheiten aus und leiten Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung von $(\Delta x, \Delta z)$ her.

(c) Geben Sie hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung des Gleichungssystems aus (b) an.

(d) Geben Sie ein generisches pfadverfolgendes Verfahren für das lKoP in Form eines Pseudocodes an.