Optimierung 1 SS 2017
8. Übungsblatt

55. Lösen Sie das untenstehende lineare Programm mit einem Verfahren ihrer Wahl. Sei $x^* \in \mathbb{R}^4$ eine optimale Lösung. Wir bezeichnen mit $c = (1,2,1,1)^T$ und $b = (8,12,18)^T$ die Vektoren der Koeffizienten in der Zielfunktion bzw. auf der rechten Seite der linearen Restriktionen. Ermitteln Sie für jedes c_i, $1 \le i \le 4$, bzw. b_j, $1 \le j \le 3$, das größtmögliche Intervall $[\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, sodass x^* eine optimale Lösung des linaren Programms bleibt, für alle Werte $c_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $b_j \in [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$.

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{unter} & & & & & & & & & \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \le & 8 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & \le & 12 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & \le & 18 \\
& & & x_1, & & x_2, & & x_3, \quad x_4 & \ge & 0.
\end{array}
$$

56. Betrachten Sie das folgende lineare Programm (P)

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min & & & x_2 & & & & \\
\text{unter} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
& & & x_1, x_2, x_3 \ge 0 & & & &
\end{array}
$$

(a) Bestimmen Sie den zentralen Pfad $\{(x_\mu, y_\mu, z_\mu), \mu > 0\}$ (hierbei bezeichnet x den Gesamtvektor der primalen Variablen, inklusive Schlupfvariablen, und (y, z) den Vektor der Variablen im Dualproblem mit Gleichungsnebenbedingungen).

(b) Gegen welchen Punkt strebt der zentrale Pfad für $\mu \to 0$?

(c) Was läßt sich aus (b) über die Optimallösung zu (P) und dessen Dualproblem ablesen?

57. Gegeben sei das lineare Programm

$$\max \ \cos\alpha \ x_1 + \sin\alpha \ x_2$$

unter

$$x_1 \le 1, \quad x_2 \le 1, \quad x \ge 0.$$

(α ist ein fester Parameter mit $0 \le \alpha \le \pi/2$.) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den zentralen Pfad.

58. Berechnen Sie für das folgende lineare Programm den zentralen Pfad und stellen Sie ihn, sofern möglich, graphisch dar (getrennt nach Komponenten). Bestimmen Sie ferner die beiden Grenzwerte $\lim_{\mu\to\infty}(x_\mu, w_\mu y_\mu, z_\mu)$ und $\lim_{\mu\to 0}(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$. Drücken Sie ferner die Dualitätlücke (duality gap; Differenz zwischen dem augenblicklichen primalen und dem dualen Zielfunktionswert) in Abhängigkeit von μ aus.

$$\max -x_2$$

unter

$$x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

59. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & = & b_1 \\ & & & & x_3 & = & b_2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(a) Sei $b_1 = 0$ und $b_2 = 1$. Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn zeichnerisch dar (primale und duale Komponenten getrennt).

(b) Sei $b_1 = 1$ und $b_2 = 1$. Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn zeichnerisch dar (primale und duale Komponenten getrennt).

60. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\max x_1 + 2x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \quad \geq 0.$$

(a) Wenden Sie das Pfadverfolgungsverfahren an (vgl. Vorlesung). Starten Sie von der Lösung (x, w, y, z) mit $(x, w) = (1/2, 1/2, 5/2, 13/2, 3/2)$, $y = (1, 1, 5)$ und z so gewählt, daß (y, z) zulässig für das duale Problem ist. Wählen Sie zu Beginn $\mu = 10$ und reduzieren Sie μ in jeder Iteration um den Faktor 10. Der Schrittlängenparameter r sei 0.999.

Führen Sie einige Iterationen aus und geben Sie die Werte an für: primale und duale Variablen, Parameter μ, den Wert $x^t z - n\mu$ (Maß für Abweichung von Optimalität), sowie primaler und dualer Zielfunktionswert.

(b) Gegen welche Lösung (x, w, y, z) konvergiert die Folge (x_k, w_k, y_k, z_k) in diesem Beispiel? Überprüfen Sie die Optimalität.

(c) Was können Sie über die Eindeutigkeit der Optimallösungen für (P) und (D) aussagen?

(d) Könnte man die Lösung aus 60b auch mit der Simplexmethode erhalten?