# Optimierung 1 SS 2017

## 7. Übungsblatt

47. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

(a) Prüfen Sie mit dem Satz vom komplementären Schlupf, ob die Lösung mit $x_2 = 4/3$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 5/3$ und $x_1 = x_5 = 0$ eine optimale Lösung ist.

(b) Wie (a) für die Lösung mit $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 10$ und $x_4 = 23$.

48. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{rl}
\text{maximiere} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\
\text{unter} & x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 - x_5 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad + 3x_5 \leq 3 \\
& \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\quad \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

(a) Ist $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung? Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nein, finden Sie eine bessere Lösung. Nehmen Sie dazu auf jeden Fall das duale Programm und den Satz vom komplementären Schlupf zu Hilfe.

(b) Wie (a) für die Lösung mit $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$ und $x_4 = x_5 = 0$.

49. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{unter} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\
& x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\
& & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(b) Bestimmen Sie Optimallösungen von P und D sowie die zugehörigen optimalen Zielfunktionswerte. (Wählen Sie dazu eine Ihnen vom Rechenaufwand her vorteilhaft erscheinende Vorgangsweise.)

(c) Wie groß darf der Zielfunktionskoeffizient der Variable im Dualproblem D, die zur ersten Restriktion in P korrespondiert, maximal werden, ohne daß sich die Optimallösung von D verändert?

50. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen.
Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im Folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

(a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable $x_1$ nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;

(b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha| \leq b$, wobei $\alpha$ eine lineare Funktion in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ (ohne konstantes Glied) und $b$ eine Konstante ist.

51. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max\ c^t x: \quad \text{unter} \quad \sum_i x_i = 3, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.

52. Ein Paar $(x^*, y^*)$ bestehend aus einer zulässigen Lösung $x^*$ für das primale Problem $(P)$ und einer zulässigen Lösung $y^*$ für das duale Problem $(D)$ wird *strikt komplementär* genannt, wenn gilt

- $x_i^* = 0$ genau dann wenn die $i$-te duale Restriktion nicht mit Gleichheit erfüll ist.
- $y_i^* = 0$ genau dann wenn die $i$-te primale Restriktion nicht mit Gleichheit erfüllt ist.

Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcll} \min & 5x_1 & + & 5x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \geq\ 2 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \geq\ 0 \\ & x_1, & x2 & \geq & 0 \end{array}$$

Erfüllt die optimale Lösung $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 4/3)$ des obigen Problems und die dazugehörige Optimallösung des dualen Problems die strikte Komplementarität-Bedingung? Bestimmen Sie alle Paare von optimal primalen und optimal dualen Lösungen, die strikt komplementär sind.

53. Lösen Sie folgendes lineares Programm mit dem dualen Simplexverfahren:

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \geq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & \geq & 15 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Bestimmen Sie ferner eine Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird.

54. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\min 4x_1 + 4x_3 + 5x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \geq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \geq & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \geq & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ \text{frei}, \ x_4 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie D auf möglichst geschickte Weise.

(b) Geben Sie eine Optimallösung für P an.