Optimierung 1 SS 2017

6. Übungsblatt

42. **Sensitivitätsanalyse: Änderung eines Kostenkoeffizienten**

Gegeben sei ein lineares Programm in der Normalform $\max\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, sowie eine optimale Basis B. Untersuchen Sie für welchen Bereich kleiner Änderungen Δc_r eines Kostenkoeffizienten c_r, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, die Basis B optimal bleibt. Unterscheiden Sie zwei Fälle: $r \in B$ und $r \in N$, wobei $N := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$. Wie ändert sich der optimale Zielfunktionswert falls B nach einer entsprechenden Änderungen von c_r und Δ_r optimal bleibt?

Veranschaulichen Sie das Ergebnis Ihrer Untersuchung anhand des folgenden Beispiels

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\
& & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

nach dem Sie die Optimalität der Basis $B = (3, 2, 1)$ nachgewiesen haben.

43. (a) Das duale Problem eines linearen Programms in Normalform $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, kann in zwei Schritten gebildet werden: zuerst wird das Problem in die kanonische Form überführt, dann wird die kanonische Form des Problems dualisiert (vgl. Vorlesung). Dabei wird jede Gleichheitsrestriktion als zwei Ungleichungen dargestellt und impliziert somit je zwei nichtnegative Variablen im Dualen. Überlegen Sie sich ob die jeweiligen Paare von Dualvariablen in je eine vorzeichenunrestringierte Variable kombiniert werden können. Wie ändert sich das duale Problem eines linearen Programms in kanonischer Form, wenn bei eine (oder mehreren Restriktionen) die Richtung von „kleiner oder gleich" auf „größer oder gleich" geändert wird? Überlegen Sie weiters was das Fehlen von Vorzeichenrestriktionen über eine oder mehrere primale Variablen im dualen Problem bewirkt.

(b) Setzen Sie die Überlegungen aus (a) in der *direkten* Dualisierung folgender Probleme um, (d.h. ohne Überführung in die kanonischer Form):

(i)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 4 \\
& x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \geq & -1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 2 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
& \multicolumn{9}{c}{x_1 \text{ frei}, \ x_2, x_3, x_4 \geq 0.}
\end{array}
$$

(ii)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 34x_1 & + & 5x_2 & + & 19x_3 & + & 9x_4 & & \\
\text{unter} & -2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & -9 \\
& 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\
& 4x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\
& \multicolumn{9}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

44. **Parametrische Kosten**

Für ein Parameter $t \in \mathbb{R}^k$ und ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, betrachten wir die parametrische lineare Optimierungsaufgabe $z(t) := \max\{c(t)^T x : x \in P\}$, wobei die Zielfunktionskoeffizienten affin-linear in t sind, i.e. $c(t) := c + Dt$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $D \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

Es wird angenommen das P nichtleer ist. Sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}(P)$ die Menge der zulässigen Basen von P. Für jede Basis $B \in \mathcal{B}$ sei $T(B)$ der dazugehörige *Optimalitätsbereich* durch $T(B) := \{t \in \mathbb{R}^k : \bar{c}_N(t) \leq 0\}$ definiert. Hier sind $\bar{c}_N(t)$ die *parametrischen reduzierten Kosten*, die analog wie die reduzierten Kosten $\bar{c}_N$ (diese entsprechen $t = 0$) definiert werden. $T(B)$ ist also die Menge jener Werte des Parameters t, für die die Basis B optimal ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Optimalitätsbereich $T(B)$ für jede Basis $B \in \mathcal{B}$ ein Polyeder ist, falls $T(B) \neq \emptyset$.

(b) Betrachten Sie den *Optimalwertfunktion* $z: T \in \mathbb{R}$, $t \mapsto z(t)$, mit Definitionsbereich $T := \cup_{B \in \mathcal{B}} T(B) = \{t: z(t) < \infty\}$. Es wird angenommen, dass $T \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass T ein Polyeder ist und $z: T \to \mathbb{R}$ eine stetige und konvexe Funktion ist.

45. **Einparametrische Probleme**

Betrachtet man das in Übungsbeispiel 44 definierte Problem für $k = 1$ so erhält man die einparametrische Aufgabe $z(t) := \max\{(c + td)^T x : x \in P\}$, $t \in T$, bei der es um die Berechnung optimaler Lösungen für alle $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ geht. Falls $T \neq \emptyset$, dann ist T entweder ein endliches abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, oder hat die Form $T = (-\infty, b]$ oder $T = [a, +\infty)$.

Falls $T \neq \emptyset$, dann kann ein Wert $t \in T$ ausgehend von einem beliebigen $t_0 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Simplexverfahrens folgendermaßen berechnet werden. Wenn $t_0 \notin T$, dann findet man mit Hilfe des Simplexverfahrens eine Basis B und eine Pivotspalte mit positiven reduzierten Kosten $\bar{c}_s(t_0) = \bar{c}_s + t_0 \bar{d}_s > 0$ (wobei $\bar{c}_N^T := c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ und $\bar{d}_N^T := d_N^T - d_B^T A_B^{-1} A_N$) in der alle anderen Einträge nichtnegativ sind. $T \neq \emptyset$ impliziert $\bar{d}_s \neq 0$. Nun kann die Lage von T abgegrenzt werden:

$$T \subseteq \left(-\infty, -\frac{\bar{c}_s}{\bar{d}_s}\right) \text{ falls } \bar{d}_s > 0, \text{ und } T \subseteq \left(-\frac{\bar{c}_s}{\bar{d}_s}, +\infty\right) \text{ falls } \bar{d}_s < 0.$$

Dann wählt man als nächsten Wert für den Parameter t die endliche Grenze t_1 des obigen Halbintervalls und versucht mit Hilfe des Simplexverfahrens eine optimale Basis für t_1 zu bestimmen. Falls dies nicht gelingt, d.h. das Problem ist für t_1 unbeschränkt, i.e. $t_1 \notin T$, so kann analog wie oben die Lage von T weiter abgegrenzt werden. Diese Prozedur lässt sich nun solange wiederholen bis schließlich ein $t \in T$ gefunden wird oder der Nachweis, dass $T = \emptyset$ vorliegt.

Begründen Sie die Richtigkeit des obigen Ansatzes und wenden Sie ihn an, um ein $t \in T$ für das folgende einparametrische Problem zu bestimmen.

$$\begin{array}{llcccccc}
\max & (2-2t)x_1 & + & (-1-t)x_2 & + & x_3 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2, x_3 & & \geq & & 0 & &
\end{array}$$

46. **Einparametrische Probleme (Fortsetzung)**

Betrachten Sie das einparametrische Problem aus Übungsbeispiel 45.

(a) Sei B eine optimale Basis für ein beliebiges aber fixes $t_0 \in T$. Zeigen, dass das Optimalitätsintervall $T(B)$ als $T(B) := \left\{t: \tilde{c}_N^T + t\tilde{d}_N^T \leq 0\right\} =: \left[\underline{t}(B), \bar{t}(B)\right]$ gegeben ist, wobei

$$\bar{t}(B) := \begin{cases} \min\left\{-\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{d}_j}: \tilde{d}_j > 0, j \in N\right\} & \text{falls } \tilde{d}_N \not\leq 0 \\ \infty & \text{falls } \tilde{d}_N \leq 0 \end{cases}$$

$$\underline{t}(B) := \begin{cases} \max\left\{-\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{d}_j}: \tilde{d}_j < 0, j \in N\right\} & \text{falls } \tilde{d}_N \not\geq 0 \\ -\infty & \text{falls } \tilde{d}_N \geq 0 \end{cases}$$

(b) Für $t > \bar{t}$ oder $t < \underline{t}$ ist die Basis B aus (a) nicht optimal. Falls $T \not\subseteq (-\infty, \bar{t}]$ so kann eine neue optimale Basis etwa für $t = \bar{t} + \epsilon \in T$ mit $\epsilon > 0$, ϵ *klein genug*, folgendermaßen bestimmt werden. Seien $\tilde{c}_N + \bar{t}\tilde{d}_N$ die reduzierten Kosten zu Basis B. Wähle eine Pivotspalte s mit $\tilde{d}_s > 0$ und $\tilde{c}_s + \bar{t}\tilde{d}_s = 0$. $\bar{t} + \epsilon \in T$ impliziert, dass nicht alle Einträge $\tilde{a}_{.s}$ der Spalte s im Simplextableau zur Basis B nichtnegativ sind. Es lässt sich also eine Pivotzeile r und eine neue Basis $\bar{B}$ finden, die zum gleichem Zielfunktionswert und gleichen parametrischen reduzierten Kosten $\bar{c} + \bar{t}\bar{d}$ wie die Basis B führt, d.h. $\bar{c} + \bar{t}\bar{d} = \tilde{c} + \bar{t}\tilde{d}$. Die reduzierten Kostenkoefficienten ändern sich jedoch, d.h. $\tilde{c} \neq \bar{c}$, $\tilde{d} \neq \bar{d}$. Da $\bar{c}_s = \tilde{c}_s / \tilde{a}_{rs}$ und $\bar{d}_s = \tilde{d}_s / \tilde{a}_{rs} < 0$, gilt

$$\bar{c}_s + t\bar{d}_s > \bar{c}_s + \bar{t}\bar{d}_s \text{ für } t < \bar{t}.$$

Also ist $\underline{t}(\bar{B}) = \bar{t}(B)$. Wie in (a) kann nun auch $\bar{t}(\bar{B})$ bestimmt werden. Wenn $\bar{t}(\bar{B}) = \underline{t}(\bar{B})$, dann sind weitere Pivotschritte mit einer Zusatzregel zur Vermeidung von Basiszyklen notwendig. Jedenfalls wird nach endlich vielen Schritten ein neues Optimalitätsintervall $[\underline{t} = \underline{t}(B), \bar{t}]$ mit $\bar{t} > \bar{t}(B)$ bestimmt. Analog können die Optimalitätsintervalle in $(-\infty, \underline{t}(B)] \cap T$ bestimmt werden, sodass eine Überdeckung von T mit k Intervallen, $k \in \mathbb{N}$, entsteht, $T = \cup_{i=0}^{k-1} [t_i, t_{i+1}]$, $t_0 < t_1 \ldots < t_k$, und die Basen $B_i, i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, existieren, die für die Werte von t in den jeweiligen Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ optimal sind. Hier können t_0 und t_k auch $-\infty$ bzw. $+\infty$ sein.

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des obigen Ansatzes und wenden Sie ihn an um das einparametrische Problem

$$\begin{array}{lcccccccc}
\max & t & + & (-1+t)x_1 & + & (0-2t)x_2 & & & \\
\text{unter} & & & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq 3 \\
 & & & x_1 & - & x_2 & & & \leq 5 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & & 0 &
\end{array}$$

zu lösen.