

Optimierung 1 SS 2017

5. Übungsblatt

35. Gegeben sei ein lineares Programm in der kanonischen Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_5, x_6, x_7)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	δ	-3	γ	ϵ	
β	α	1	0	3	x_5
2	-2	2	φ	-1	x_6
3	0	-1	2	1	x_7

Für welche Wahl der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ and φ gelten die folgenden Aussagen?

- (a) B ist zulässig.
- (b) B ist zulässig, aber entartet.
- (c) B ist zulässig, aber nicht optimal.
- (d) B ist optimal.
- (e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.
- (f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?
- (g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_7 gegen x_3 ergäbe sich eine Verbesserung?

36. Gegeben sei das folgende lineare Programm P :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 6x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & + & 15x_4 & & & & \\
 \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 36 & & \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & \geq & -72 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 24 & & \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 & & & &
 \end{array}$$

- (a) Bestimmen Sie eine Optimallösung von P und geben Sie den zugehörigen Zielfunktionswert an.
- (b) Ist die in (a) gefundene Optimallösung eindeutig?

37. **Sensitivitätsanalyse.**

- (a) Betrachten sie eine Basislösung x des linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, die zur Basis B gehört. Wie ändert sich x , wenn die rechte Seite des linearen Programms sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?
- (b) Gegeben sei eine nichtentartete Basislösung x des linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Es gibt ein $\epsilon > 0$, sodaß gilt: Wenn $|t_i| \leq \epsilon$ für $i = 1, \dots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0\}$ zulässig.
- (c) Gegeben sei eine optimale Basislösung x^* des linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Wenn die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm optimal.

- (d) Zeigen Sie: Wenn x^* eine nichtentartete optimale Basislösung mit Optimalwert z^* des linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programms $\max\{c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^m \pi_i t_i$$

mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

38. Gegeben sei $\max c^t x$ unter $Ax \leq 0, x \geq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $x = 0$ eine optimale Lösung (es könnte auch noch andere optimale Lösungen geben), oder das Problem ist nach oben unbeschränkt.
39. Sei A eine gegebene symmetrische $n \times n$ Matrix. Betrachten Sie das lineare Programm der Form $\min c^t x$ unter den Restriktionen $Ax \geq c$ und $x \geq 0$. Sei x^* ein Vektor mit $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$. Zeigen Sie, daß x^* eine Optimallösung des gegebenen linearen Programms ist.
40. Beweisen Sie: Wenn das lineare Programm

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

keinen zulässigen Punkt x hat, dann gibt es einen Vektor d , sodaß das lineare Programm

$$\min\{b^t y \mid A^t y \geq d, y \geq 0\}$$

unbeschränkt ist.

41. Beweisen Sie:

Das primale lineare Programm

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm

$$\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

mindestens einen zulässigen Punkt y hat, und wenn es eine Schranke K gibt, sodass für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms gilt: $\|y\|_\infty \leq K$.