Optimierung 1 SS 2017

3. Übungsblatt

19. Bringen Sie das untenstehende lineare Programm auf die in der Vorlesung eingeführte Normalform:

$$\min -6x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \geq & -36 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 72 \\ x_1 & + & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0.$$

Anmerkung: Es gibt zwei Arten mit der nicht vorzeichenbeschränkten Variable x_3 umzugehen. Setzen Sie beide um und vergleichen Sie. Wären beiden Ansätze auch möglich, wenn statt x_3 die Variable x_2 nicht vorzeichenbeschränkt wäre?

20. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & 9x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & & \\ \text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & -10 \\ & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & \geq & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie dieses lineare Programm mit dem Simplexverfahren ausgehend von der Basislösung, die zu $B = (2, 3)$ gehört.

(b) Lösen Sie dieses lineare Programm mit der Zweiphasenmethode von Dantzig.

21. Die Koeffizientenmatrix A und der Vektor b der rechten Seite eines linearen Programms mit Restriktionen $Ax = b$, $x \geq 0$ seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die ersten drei Spalten von A eine Basislösung von $Ax = b$ liefern. Ist diese Basis zulässig bzw. entartet? Bestimmen Sie durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen, und prüfen Sie, welche davon entartet, bzw. zulässig sind.

22. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

		x_2	x_3	x_5
	-8	8/3	-11	4/3
x_1	4	2/3	0	4/3
x_4	2	-7/3	3	-2/3
x_6	2	-2/3	-2	2/3

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen abhängigen Variablen und die Zielfunktion durch die augenblicklichen unabhängigen Variablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1,\ x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Eine zulässige Startlösung ist mit der M-Methode zu bestimmen.

24. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & 10\,x_1 & - & 57\,x_2 & - & 9\,x_3 & - & 24\,x_4 & & \\ \text{unter} & 0,5\,x_1 & - & 5,5\,x_2 & - & 2,5\,x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ & 0,5\,x_1 & - & 1,5\,x_2 & - & 0,5\,x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,

(b) mit der kleinsten-Index-Regel (die Regel von Bland).

25. Seien P und P' die Polyeder der zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblem in der in der Vorlesung benutzten Standardform (Restriktionen $Ax \leq b, x \geq 0$) bzw. in der Normalform (Restriktionen $(A|E)x = b$).

(a) Zeigen Sie, dass jeder Seite S von P eine Seite S' von P' mit $dim(S') = dim(S)$ zugeordnet werden kann. Geben Sie eine mathematisch präzise Definition einer derartigen Abbildung der Menge $\mathcal{S}$ der Seiten von P auf die Menge $\mathcal{S}'$ der Seiten von P'.

(b) Ist diese Abbildung injektiv, surjektiv?

(c) Veranschaulichen Sie die Abbildung f und ihre Eigenschaften anhand des folgenden linearen Optimierungsproblems:

$$\min\{x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 1\,, x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\}$$