Optimierung 1 SS 2017

2. Übungsblatt

14. Bringen Sie das untenstehende lineare Programm zunächst auf die kanonische Form und dann auf die Standardform (vgl. Vorlesung):

$$\min -6x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \geq & -36 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 72 \\ x_1 & + & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0.$$

15. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Für wahre Aussagen ist ein Beweis anzugeben und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

   (a) Gegeben sei ein lineares Programm mit redundanten Restriktionen. Das lineare Programm, das durch Wegwerfen aller redundanten Restriktionen resultiert, ist äquivalent zum ursprünglichen Problem. (Eine Restriktion wird als redundant bezeichnet, wenn das lineare Programm, das sich durch Weglassen dieser einen Restriktion ergibt, äquivalent zum Ausgangsproblem ist.)

   (b) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen (Vorzeichenbedingungen werden hier nicht mitgezählt), einer Gleichungsrestriktion und n Variablen. Dieses lineare Programm läßt sich stets in ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen und $n-1$ Variablen überführen (indem eine Variable aus der Gleichung ermittelt und in das Restproblem eingesetzt wird).

   (c) Die Maximierung der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

   läßt sich mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren.

   (d) Analog zu Aufgabe 15c für die Minimierung dieser Zielfunktion.

16. Betrachten Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Stellen Sie den zulässigen Bereich des Problem in $\mathbb{R}^2$ geometrisch dar. Bestimmen Sie alle Basen und geben Sie für jede Basis an, ob sie zulässig bzw. entartet ist. Bestimmen Sie zu jeder Basis die dazugehörige Basislösung und geben Sie ggf. die dazugehörige Ecke des Polyeders der zulässigen Lösungen in $\mathbb{R}^2$ an.

17. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \le b$, $x \ge 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_3, x_4, x_6)$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x_1 & x_2 & x_5 & \\
10 & c_1 & c_2 & 0 & \\
\hline
b_1 & 4 & a_1 & a_2 & x_3 \\
2 & -1 & -5 & -1 & x_4 \\
3 & a_3 & -3 & -4 & x_6
\end{array}$$

Für welche Wahl der Parameter a_1, a_2, a_3, b_1, c_1 und c_2 gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist nicht zulässig.

(b) B ist zulässig, aber entartet.

(c) B ist zulässig, aber nicht optimal.

(d) B ist optimal.

(e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?

(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_6 gegen x_1 ergäbe sich eine Verbesserung?

(h) Wird x_2 in die Basis aufgenommen und x_3 im Gegenzug aus der Basis entfernt, so erhält man eine neue zulässige Basis mit einem Zielfunktionswert < 10.

18. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms mit den Restriktionen $Ax = b$, $x \ge 0$, seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Basislösung, die der Basis $B = \{1, 2, 3\}$ entspricht. Bestimmen Sie danach ausgehend von dieser Basislösung durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen.