Optimierung 1 SS 2017
12. Übungsblatt

85. Sei $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Funktion $E : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$E(x) = \frac{1}{2}||F(x)||^2.$$

   (a) Wie verhalten sich Extrema und Nullstellen von E und F zueinander? Welche Möglichkeiten ergeben sich die Nullstellen von F zu bestimmen?

   (b) Nehmen Sie an, dass $\nabla F(x)$ an der Stelle $x = x'$ regulär ist. Zeigen Sie, dass dann die Newtonrichtung für F in x' eine Abstiegsrichtung für E ist.

86. Fermat-Weber Problem und Weiszfeld Algorithmus: Das Fermat-Weber Problem, eines der grundlegenden geometrischen Standortprobleme, lässt sich wie folgt beschreiben: Gegebene seien m Punkte $a_1, \ldots a_m$ im $\mathbb{R}^n$ sowie m positive Gewichte $w_1, \ldots, w_m$. Gesucht ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, der die gewichtete Abstandssumme von x zu den gegebenen Punkten gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{m} w_i ||x - a_i||$$

minimiert. Der folgende Algorithmus wurde 1937 von Weiszfeld angegeben:

- Wähle ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x^0 \neq a_1, \ldots, a_m$.
- Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ berechne

$$x^{k+1} = T(x^k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{||x^k - a_i||}} \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_i}{||x^k - a_i||}$$

Dieser Algorithmus ist nur definiert wenn alle Iterierten x^k verschieden von $a_1, \ldots, a_m$ sind.

   (a) Zeigen Sie, dass man den Weiszfeld Algorithmus als Gradientenverfahren mit geeigneter Schrittweitenwahl interpretieren kann.

   (b) (Für Ambionierte) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f(x^k)\}$ monoton fallend ist (unter der oben genannten Voraussetzung die einen wohldefinierten Algorithmus garantiert) und sogar streng monoton fallend wenn man in einem stationären Punkt steckenbleibt.

87. Orthonormale Invarianz des CG-Verfahrens: Das CG-Verfahren mit Startvektor x^0 angewendet auf das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (bzw. das quadratische Minimierungsproblem $\frac{1}{2}x^t Ax - b^t x$) liefere die Iterierten x^k.

   Sei Q eine orthonomale Matrix (d.h. $Q^t Q = I$). Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$$

   mit $\widetilde{A} = Q^t AQ$, $\widetilde{x} = Q^t x$, $\widetilde{b} = Q^t b$. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren für das transformierte System startend von $\widetilde{x}^0 = Q^t x^0$ die Iterierten $\widetilde{x}^k$ mit $\widetilde{x}^k = Q^t x^k$ liefert.

88. Zeigen Sie, dass für den Spezialfall einer quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - b^t x$ die folgenden drei Methoden zum Finden neuer konjugierter Richtungen

$$d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$$

   (a) Fletcher-Reeves

$$\beta_k^{\mathrm{FR}} = \frac{||\nabla f(x^{k+1})||^2}{||\nabla f(x^k)||^2}$$

(b) Hestenes-Stiefel

$$\beta_k^{\text{HS}} = \frac{(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k))^t \nabla f(x^{k+1})}{(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k))^t d^k}$$

(c) Polak-Ribière:

$$\beta_k^{\text{PR}} = \frac{(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k))^t \nabla f(x^{k+1})}{||\nabla f(x^k)||^2}$$

äquivalent sind, wenn jeweils die exakte (minimierende) Schrittweite als t_k gewählt wird in $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$.

89. Zeigen Sie, dass für die Methode der konjugierten Gradienten folgende Ungleichung gilt:

$$E(x_k) \leq 4\Big(\frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}\Big)^{2k} E(x_0)\,,$$

wobei $E(x_k)$ ist wie in der Vorlesung defineirt, $\gamma = a/A$ und a, A sind der kleinste bzw. der größter Eigenwert der positiv definiten Matrix Q, die in der zu minimierenden Funktion $f(x) := \frac{1}{2}x^tQx - b^tx$ (vgl. Vorlesung) vorkommt.

Hinweis: Das Polynom $P_{k-1}(\lambda)$ (vgl. Vorlesung) kann so gewählt werden, dass

$$1 + \lambda P_{k-1}(\lambda) = \frac{T_k(\frac{A+a-2\lambda}{A-a})}{T_k(\frac{A+a}{A-a})}$$

wobei $T_k(\lambda) = cos(k\, arccos\lambda)$ ist das k-te Tschebyschew-Polynom, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Überprüfen Sie die Korrektheit folgender Ungleichung und verwenden Sie sie:

$$\frac{(1-\gamma)^k}{(1+\sqrt{\gamma})^{2k} + (1-\sqrt{\gamma})^{2k}} \leq \Big(\frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}\Big)^k .$$

90. Betrachten Sie die Methode der konjugierten Gradienten angewandt auf die Funktion $f(x) := \frac{1}{2}x^tQx - b^tx$. Angenommen die Eigenwerte von Q liegen in einem Intervall $[a, A]$ oder in einem Intervall $[a+\Delta, A+\Delta]$ wobei a, A und Δ positive Konstanten sind. Zeigen Sie, dass die partielle Methode der konjugierte Gradienten, die in jeder zweiten Iteration einen reinen Schritt des steilsten Abstiegs macht, für jedes $\Delta > 0$ mit einer Konvergenzrate von höchstens $[(A-a)/(A+a)]^2$ konvergiert.