Optimierung 1 SS 2017
10. Übungsblatt

65. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x_1, x_2) := 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$
Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f und entscheiden Sie welche davon lokale Minima bzw. Maxima sind. Erstellen Sie ferner einen Flächen- und einen Höhenlinienplot von f mittels Matlab oder eines anderen Ihnen für diesen Zweck geeignet erscheinenden Programmpakets.

66. Gegeben sei die sogenannte Rosenbrock Funktion (eine beliebte Testfunktion für Lösungsverfahren für unrestringierte Optimierungsprobleme)
$$f(x_1, x_2) := 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$
Bestimmen Sie alle stationären Punkte und entscheiden Sie welche davon lokale Minima bzw. Maxima sind.

67. Bestimmen Sie alle stationäne Punkte der folgenden Funktionen und entscheiden Sie welche davon lokale Extrema sind:
    (a) $f(x_1, x_2) := 1/2x_1^2 + x_1 \sin x_2$
    (b) $f(x_1, x_2) := 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$

68. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2.$$
    (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte. Welche davon entsprechen lokalen Minima bzw. lokalen Maxima?
    (b) Handelt es sich beim Ursprung um ein lokales Minimum? Falls nicht, finden Sie eine Richtung d entlang der f abnimmt.
    (c) Minimieren Sie f ausgehend vom Ursprung entlang der Richtung d, die Sie in (b) gewählt haben.

69. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ so dass für $\alpha = 0$ alle Funktionen $g(\alpha) := f(x^* + \alpha d)$ mit $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ beliebig ein lokales Minimum annehmen.
    (a) Zeigen Sie, dass $\nabla f(x^*) = 0$.
    (b) Zeigen Sie, dass die obige Bedingung nicht impliziert, dass f in x^* ein lokales Minimum annimmt. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x_1, x_2) := (x_2 - ux_1^2)(x_2 - vx_1^2)$ mit $0 < u < v$.)

70. Bezeichne $P_n(0, 1)$ die Menge der Polynome vom Grad n auf dem Intervall $(0, 1)$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Koeffizientenvektor $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ des Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ an, das die Funktion
$$f(a) = \int_0^1 |p(x) - g(x)|^2 dx$$
minimiert für eine gegebene Funktion $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

71. A eine eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ mit Rang n. Ferner sei $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeigen Sie, dass das vorzeichenbeschränkte lineare Ausgleichsproblem

$$\min h(x) = ||Ax - b||_2$$

auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ eindeutig lösbar ist. Betrachten Sie dazu das äquivalente Optimierungsproblem, das h^2 über M minimiert.

72. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : X \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *gleichmäßig konvex* falls es $\mu > 0$ existiert, sodass

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x) + \mu\lambda(1-\lambda)||x-y||^2 \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

für alle $x, y \in X$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. μ heißt *Modulus* der gleichmäßigen Konvergenz.

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist gleichmässig konvex (auf X) mit Modulus $\mu > 0$.

(b) Die durch $g(x) := f(x) - \mu||x||^2$ definierte Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist konvex (auf X).

Geben Sie das Beispiel einer strikt konvexen jedoch nicht gleichmäßig konvexen Funktion an.

73. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht-leer wird quasikonvex genannt, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \qquad \text{für alle } x, y \in X, \lambda \in [0,1]$$

gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht-leer ist quasikonvex genau dann wenn $X_\alpha := \{\, x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ eine konvexe Menge für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ferner sei f differenzierbar. Zeigen Sie dass f quasikonvex ist genau dann wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   - Wenn $x, y \in X$ und $f(x) \leq f(y)$, dann gilt $\nabla f(y)^t(x-y) \leq 0$.
   - Wenn $x, y \in X$ und $\nabla f(y)^t(x-y) > 0$, dann gilt $f(x) > f(y)$.

(c) Verwenden Sie das Resultat aus (b), um zu entscheiden ob $f(x) = x^3$ quasikonvex ist.

(d) Verwenden Sie das Resultat aus (b), um zu entscheiden ob $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ quasikonvex ist. Was schliessen Sie aus dem Ergebnis?