

## Operations Research WS 2011/2012

### 6. Übungsblatt

32. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die untenstehenden Situationen

- (a)  $S(Y) \subset Y_{eff} \subset S_0(Y)$  wobei beide Inklusionen strikt und  $S(Y)$ ,  $S_0(Y)$  wie in der Vorlesung definiert sind.  
 (b)  $S(Y) \cup S'_0(Y) = Y_{eff} = S_0(Y)$ , wobei

$$S'_0(Y) = \left\{ y' \in Y : y' \text{ ist das Element der einelementigen Menge } Opt(\lambda, Y), \lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\} \right\}$$

33. Sei  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 100, 2x_1 + x_2 \leq 150\}$ ,  $f_1(x_1, x_2) = -6x_1 - 4x_2$  und  $f_2(x_1, x_2) = -x_1$ . Lösen Sie das  $\epsilon$ -restringierte Problem  $P_1(\epsilon)$  für  $\epsilon = 0$  (siehe die Vorlesung für die Definition des  $\epsilon$ -restringierten Problems). Überprüfen Sie mit Hilfe der Methode von Benson ob die optimale Lösung  $x^*$  von  $P_1(0)$  Pareto-optimal für  $(X, f, \mathbb{R}^2)/id/(\mathbb{R}^2, <)$  ist.

34. Lösen Sie das Problem aus Beispiel 33 unter Anwendung der "compromise programming" Methode. Verwenden Sie  $w = (1/2, 1/2)$  und bestimmen Sie die Lösung von  $CP_p^w$  für  $p = 1, 2, \infty$ .

35. (Ehrgott et al. 1997)

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $\bar{x} \in X$ . Die Menge  $L_{\leq}(f(\bar{x})) = \{x \in X : f(x) \leq f(\bar{x})\}$  heißt *Niveau-Menge* von  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$ , die Menge  $L_{=}(f(\bar{x})) = \{x \in X : f(x) = f(\bar{x})\}$  heißt *Niveau-Kurve* von  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$  und  $L_{<}(f(\bar{x})) = \{x \in X : f(x) < f(\bar{x})\}$  heißt *strikte Niveau-Menge* von  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$ . Betrachten wir ein MCOP  $(X, f, \mathbb{R}^Q)/id/(\mathbb{R}^Q, <)$ . Sei  $x^* \in X$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)^T$  und  $y_q := f_q(x^*)$  für  $q = 1, 2, \dots, Q$ . Zeigen Sie, dass

- (a)  $x^*$  ist strikt Pareto-optimal dann und nur dann wenn  $\bigcap_{q=1}^Q L_{\leq}(y_q) = \{x^*\}$ , wobei  $L_{\leq}(y_q)$  die Niveau-Menge von  $f_q$  an der Stelle  $x^*$  ist,  $q = 1, 2, \dots, Q$ .  
 (b)  $x^*$  ist Pareto-optimal dann und nur dann wenn  $\bigcap_{q=1}^Q L_{\leq}(y_q) = \bigcap_{q=1}^Q L_{=}(y_q)$ , wobei  $L_{\leq}(y_q)$  wie im Punkt (a) und  $L_{=}(y_q)$  die Niveau-Kurve von  $f_q$  an der Stelle  $y_q$  ist,  $q = 1, 2, \dots, Q$ .  
 (c)  $x^*$  ist schwach Pareto-optimal dann und nur dann wenn  $\bigcap_{q=1}^Q L_{<}(y_q) = \emptyset$ , wobei  $L_{<}(y_q)$  die strikte Niveau-Menge von  $f_q$  an der Stelle  $y_q$  ist,  $q = 1, 2, \dots, Q$ .

36. Sei  $[a, b] \in \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex,  $i = 1, 2, \dots, Q$ . Sei

$$x_i^m = \min\{x \in [a, b] : f_i(x) = \inf_{x \in [a, b]} f_i(x)\} \text{ und}$$

$$x_i^M = \max\{x \in [a, b] : f_i(x) = \inf_{x \in [a, b]} f_i(x)\}$$

Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel 35 um folgende identische Gleichungen zu zeigen:

$$X_{Par} = \left[ \min_{i=1,2,\dots,Q} x_i^M, \max_{i=1,2,\dots,Q} x_i^m \right] \cup \left[ \max_{i=1,2,\dots,Q} x_i^m, \min_{i=1,2,\dots,Q} x_i^M \right]$$

$$X_{w-Par} = \left[ \min_{i=1,2,\dots,Q} x_i^m, \max_{i=1,2,\dots,Q} x_i^M \right]$$

37. Sei  $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2: y_1 + y_2 \geq 1, 0 \leq y_1 \leq 1\}$ . Zeigen Sie, dass  $\hat{y} = (0, 1) \in Y_{p\text{-eff}}$ , und, dass es kein  $w \in W^0$  mit  $\hat{y} \in A(w, \infty, Y)$  existiert, wenn der ideale Punkt  $y^0$  in  $CP_p^w$  verwendet wird. (Siehe Vorlesung für die Definition von  $W^0$  und  $A(w, \infty, Y)$ .)
38. Sei  $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2: y_1^2 + y_2^2 \geq 1\}$ . Zeigen Sie die Existenz eines Parameters  $p, 1 < p < \infty$ , sodass folgende Gleichung gilt:

$$Y_{eff} = \cup_{w \in W^0} A(w, p, Y).$$

Verwenden Sie den idealen Punkt  $y^0$  in der Definition von  $A(w, p, Y)$  und  $CP_p^w$ .

39. Sei  $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2: y_1 + y_2 \geq 1, 0 \leq y_1 \leq 1\}$ . Zeigen Sie, dass  $\hat{y} = (0, 1) \in Y_{p\text{-eff}}$ , und, dass es keine  $w \in W^0$  mit  $\hat{y} \in A(w, \infty, Y)$  existiert, wenn der ideale Punkt  $y^0$  in  $CP_p^w$  verwendet wird. (Siehe Vorlesung für die Definition von  $W^0$  und  $A(w, \infty, Y)$ .)